Introdução à Computação Gráfica
Geometria

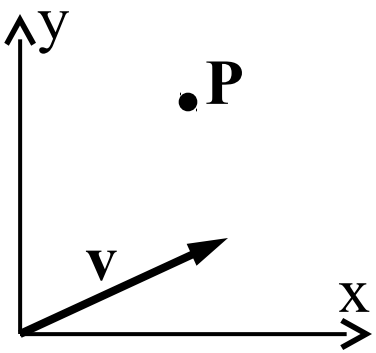
Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Geometria Afim

- Usa como elementos básicos pontos, vetores e escalares
- Ponto: Denota posição no plano
- Vetor: Denota deslocamento, isto é, inclui a noção de direção e magnitude
- Ambos são normalmente expressos por pares de coordenadas (em 2D) mas <u>não são a "mesma coisa"</u>

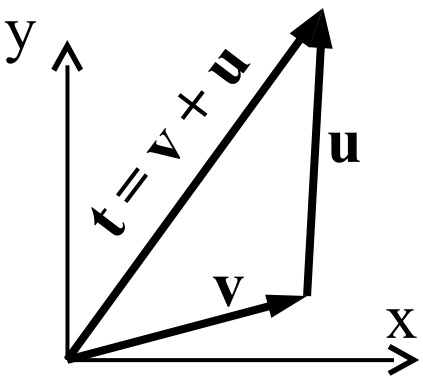
$$P = (x_P, y_P)$$

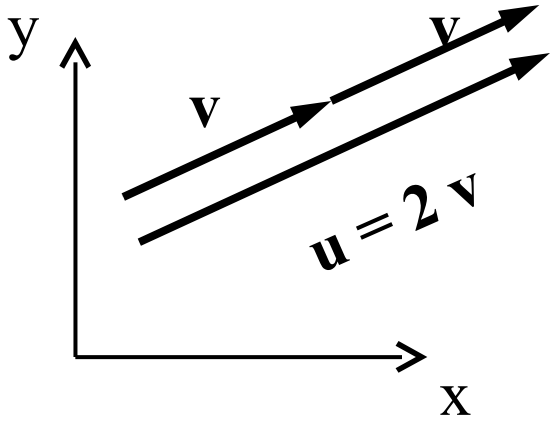
$$\vec{v} = (x_v, y_v)$$

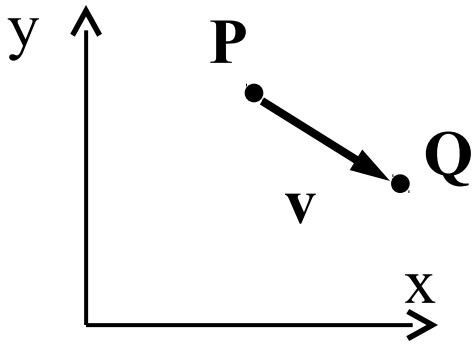


Operações com Pontos e Vetores (2D)

- Soma de vetores
  $t = v + u$
- Multiplicação de vetor por escalar
  $u = 2\,v$
- Subtração de pontos
  $v = Q - P$
- Soma de ponto com vetor
  $Q = P + v$







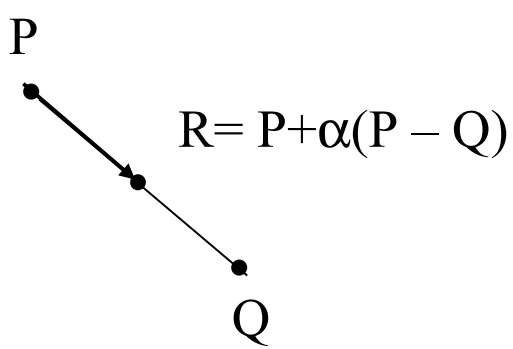
Combinações Afim

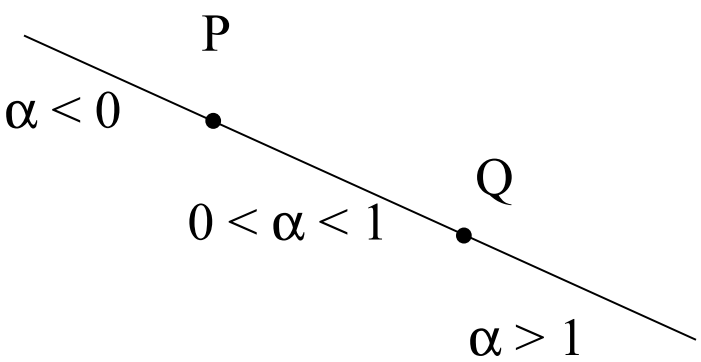
- Maneira especial de combinar pontos

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

$$\text{onde} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

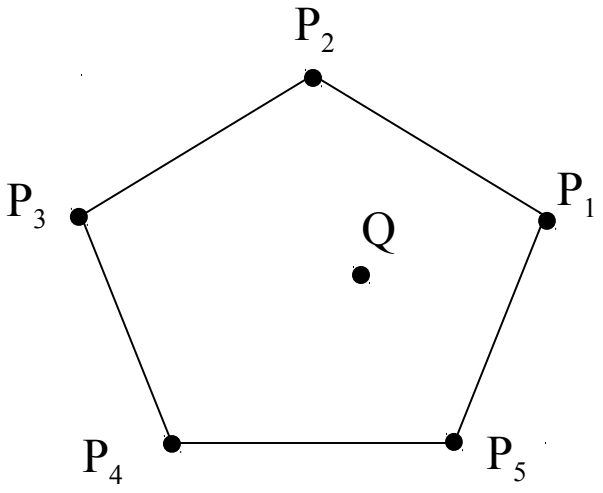
- Para 2 pontos P e Q poderíamos ter uma combinação afim $R = (1 - \alpha)P + \alpha Q = P + \alpha(P - Q)$





Combinações Convexas

- Combinações afim onde se garante que todos os coeficientes α_i são positivos (ou zero)
- Usa-se esse nome porque qualquer ponto que é uma combinação convexa de *n* outros pontos pertence à <u>envoltória convexa</u> desses pontos



Transformações

- Transformação é uma função que mapeia pontos de um espaço Euclidiano em outros (ou possivelmente os mesmos) pontos do mesmo espaço.
- Se uma transformação é <u>linear</u>, então
  - Se um conjunto de pontos está contido em uma reta, depois de transformados eles também estarão contidos sobre uma reta.
  - Se um ponto P guarda uma relação de distância com dois outros pontos Q e R, então essa relação de distância é mantida pela transformação.
- Transformação mapeia origem na origem?
  - Sim: Transformação *Linear*
  - Não: Transformação *Linear Afim*: Translações são permitidas

Transformações Lineares em 2D

- Uma transformação linear

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

- Uma transformação linear afim

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

Forma Matricial

- Mais conveniente para uso em um computador. Sejam

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

- Então uma transformação linear afim pode ser escrita $T(P) = P'$ onde

$$P' = A \times P + D$$

Transformando Vetores

- Um vetor não está atrelado a um ponto no espaço
- Uma transformação linear afim aplicada a um vetor não inclui translação
- Prova: Seja V um vetor e V' sua imagem sob a transformação linear afim, então:

$$V = Q - P \Leftrightarrow V' = Q' - P'$$

$$V' \quad ¿\, Q' - P'$$

$$¿\, (A \times Q + D) - (A \times P + D)$$

$$¿\, A \times (Q - P)$$

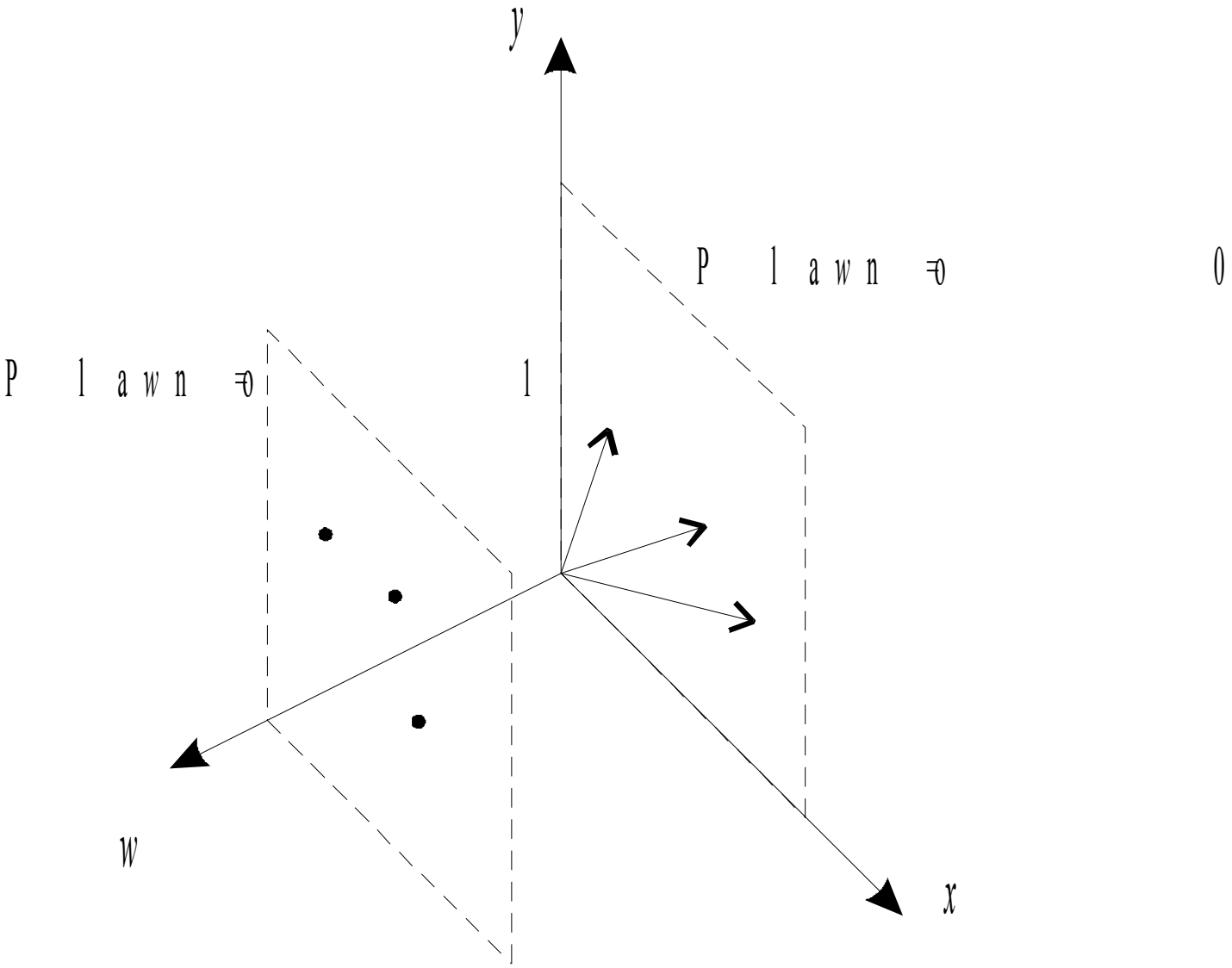
$$¿\, A \times V$$

Coordenadas Homogêneas

- A transformação de vetores é operacionalmente diferente da de pontos
- Coordenadas homogêneas permitem unificar o tratamento
- Problema é levado para uma dimensão superior:
  - Coordenada extra w= 0 para vetores e =1 p/ pontos
  - Termos independentes formam uma coluna extra na matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas - Interpretação



Coordenadas Homogêneas: Propriedades

- Operações sobre pontos e vetores são **legais** se e somente se o resultado em coordenadas homogêneas possui em sua **última coordenada** o valor **0** (vetor) ou **1** (ponto).

- **Legal** : (Consider the last coordinate only)

  escalar $\cdot$ vetor $\rightarrow$ vetor: $\boldsymbol{\alpha}[\ldots, 0] = [\ldots, 0]$

  vetor + vetor $\rightarrow$ vetor: $[\ldots, 0] + [\ldots, 0] = [\ldots, 0]$

  ponto + vetor $\rightarrow$ ponto: $[\ldots, 1] + [\ldots, 0] = [\ldots, 1]$

  ponto – ponto $\rightarrow$ vetor: $[\ldots, 1] - [\ldots, 1] = [\ldots, 0]$

  combinação afim ($\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}$): $\alpha[\ldots, 1] + \beta[\ldots, 1] = [\ldots, \alpha+\beta]$,

  (válida só se $\alpha+\beta = 1$)

- **Ilegal** :

  ponto + ponto $\rightarrow$? $[\ldots, 1] + [\ldots, 1] = [\ldots, \mathbf{2}]$

  vetor – ponto $\rightarrow$? $[\ldots, 0] - [\ldots, 1] = [\ldots, \mathbf{-1}]$

  escalar $\cdot$ ponto $\rightarrow$? $\boldsymbol{\alpha}[\ldots, 1] = [\ldots, \boldsymbol{\alpha}]$

Geometria Euclidiana

- Extensão da geometria afim pela adição de um operador chamado *produto interno*
- Produto interno é um operador que mapeia um par de vetores em um escalar. Tem as seguintes propriedades:
  - Positividade : $(u,u) \geq 0$ e $(u,u) = 0$ sse $u=0$
  - Simetria: $(u,v) = (v,u)$
  - Bilinearidade: $(u,v+w)= (u,v)+ (u,w)$ e

    $(u,\alpha v)= \alpha(u,v)$

Geometria Euclidiana

- Normalmente usamos o produto escalar como operador de produto interno:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$$

- Comprimento de um vetor é definido como:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- Vetor unitário (normalizado):

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$

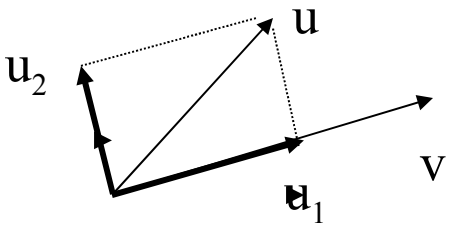
Geometria Euclidiana

- Distância entre dois pontos P e Q = $|P - Q|$
- O ângulo entre dois vetores pode ser determinado por

$$\hat{a}ngulo(\vec{u},\vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}(\hat{u}\cdot\hat{v})$$

- Projeção ortogonal: dados dois vetores u e v, deseja-se decompor u na soma de dois vetores u_1 e u_2 tais que u_1 é paralelo a v e u_2 é perpendicular a v

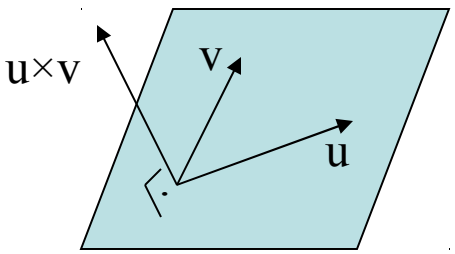
$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} \qquad \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1$$



Produto Vetorial (3D)

- Permite achar um vetor perpendicular a outros dois dados
- Útil na construção de sistemas de coordenadas

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

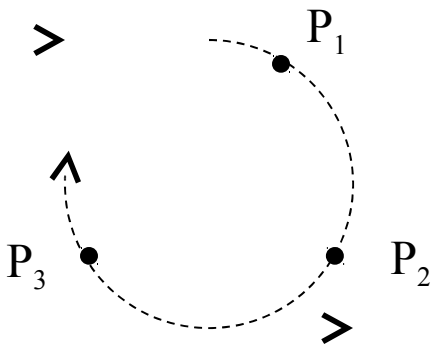


- Propriedades (assume-se u, v linearmente independentes):
  - Antisimetria: $u \times v = -v \times u$
  - Bilinearidade: $u \times (\alpha v) = \alpha (u \times v)$ e $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
  - $u \times v$ é perpendicular tanto a u quanto a v
  - O comprimento de $u \times v$ é igual a área do paralelogramo definido por u e v, isto é, $|u \times v| = |u|\,|v| \sin\theta$

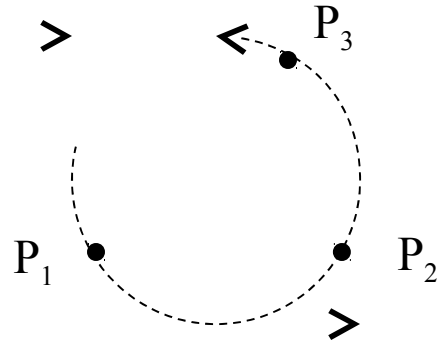
Orientação

- Orientação de 2 pontos em 1D
  - $P_1 < P_2$, $P_1 = P_2$ ou $P_1 > P_2$
- Orientação de 3 pontos em 2D
  - O percurso P_1 , P_2 , P_3 é feito no sentido dos ponteiros do relógio, no sentido contrário ou são colineares

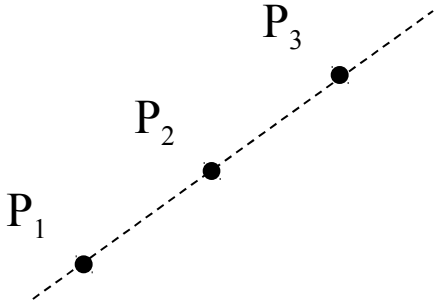
Or (P_1, P_2, P_3) = -1



Or (P_1, P_2, P_3) = +1



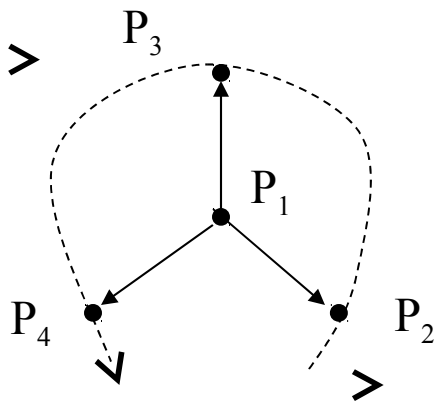
Or (P_1, P_2, P_3) = 0



Orientação

- Orientação de 4 pontos em 3D
  - O percurso P_1 , P_2 , P_3, P_4 define um parafuso segundo a regra da mão direita, mão esquerda ou são coplanares

Or (P_1, P_2, P_3, P_4) = +1



- O conceito pode ser estendido a qualquer número de dimensões ...

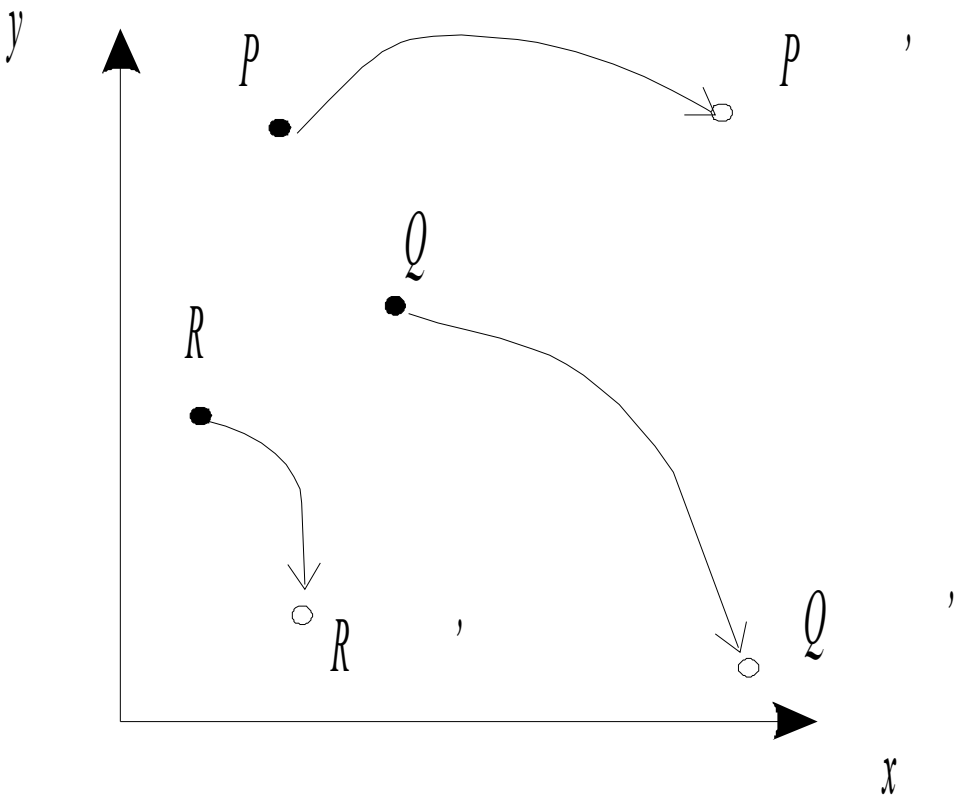
Computando orientação

- A orientação de n+1 pontos em um espaço n-dimensional é dado pelo sinal do determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas homogêneas dos pontos *com o 1 vindo primeiro*

$$\mathrm{Or}_2(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}\right) \qquad \mathrm{Or}_3(P_1, P_2, P_3, P_4) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}\right)$$

Modelando Transformações

- Uma t.l.a. em 2D pode ser definida se dispusermos da imagem de 3 pontos do domínio



$$\begin{cases} x_{P'} = a \,.\, x_P + b \,.\, y_P + e \\ y_{P'} = c \,.\, x_P + d \,.\, y_P + f \\ x_{Q'} = a \,.\, x_Q + b \,.\, y_Q + e \\ y_{Q'} = c \,.\, x_Q + d \,.\, y_Q + f \\ x_{R'} = a \,.\, x_R + b \,.\, y_R + e \\ y_{R'} = c \,.\, x_R + d \,.\, y_R + f \end{cases}$$

Sistemas de coordenadas

- Um sistema de coordenadas para $\mathbf{R}^n$ é definido por um ponto (origem) e n vetores
- Ex. Seja um sistema de coordenadas para $\mathbf{R}^2$ definido pelo ponto O e os vetores X e Y. Então,
  - Um ponto P é dado por coordenadas x_p e y_p tais que

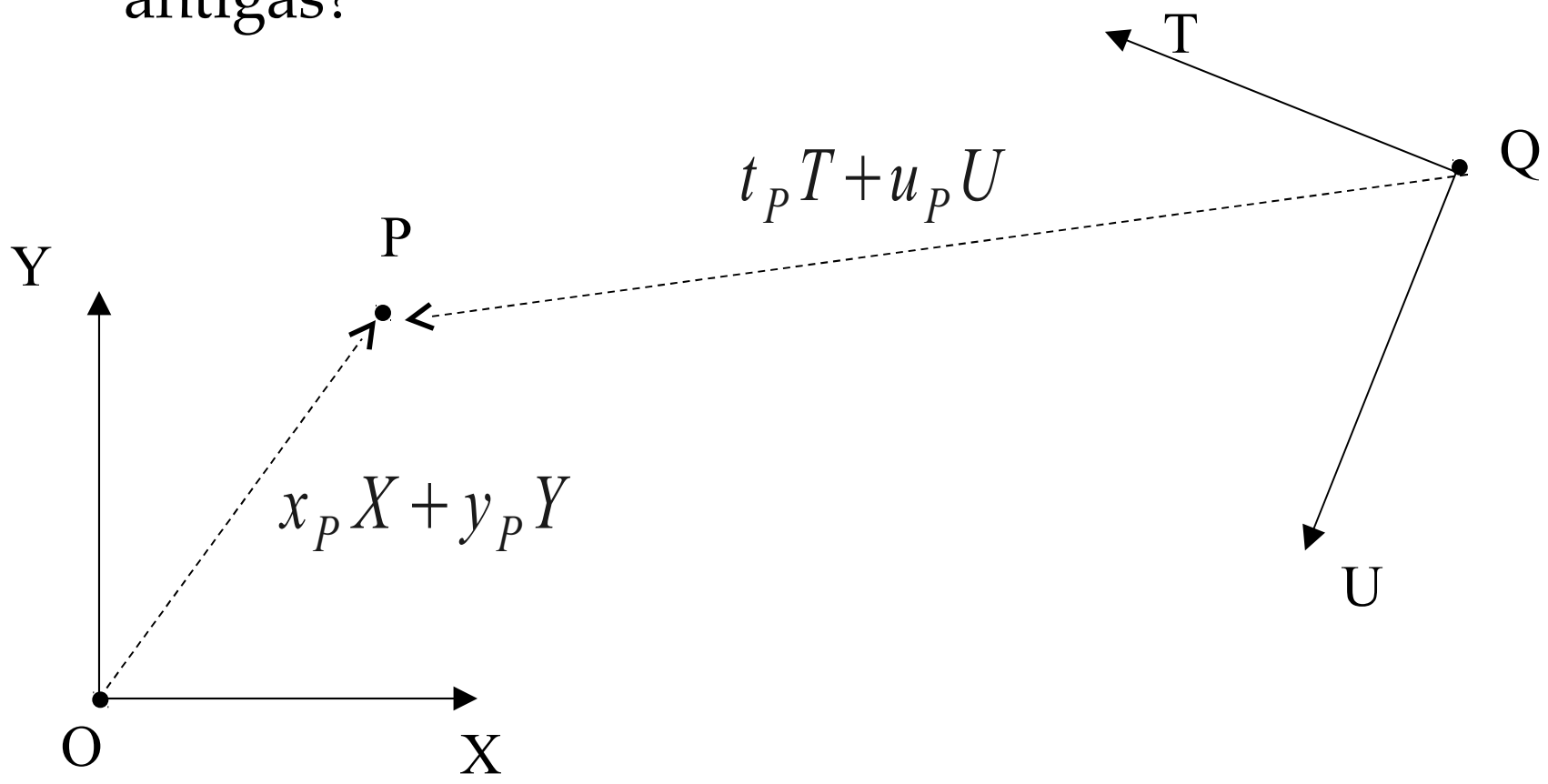
$$P = x_P . X + y_P . Y + O$$

  - Um vetor V é dado por coordenadas x_V e y_V tais que

$$V = x_V . X + y_V . Y$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Se estabelecemos um outro sistema (ex.: Q/T/U), como computar as novas coordenadas dadas as antigas?



Mudança de Sistema de Coordenadas

- Como computar as coordenadas de um ponto P = (x_P, y_P) em O/X/Y dadas as coordenadas de P em Q/T/U, isto é, (t_P, u_P) ?

$$P \qquad ¿t_P.T+u_P.U+Q$$

$$¿t_P.(x_T.X+y_T.Y)+u_P.(x_U.X+y_U.Y)+(x_Q.X+y_Q.Y+O)$$

$$¿(t_P.x_T+u_P.x_U+x_Q).X+(t_P.y_T+u_P.y_U+y_Q).Y+O$$

Logo,

$$x_P=t_P.x_T+u_P.x_U+x_Q$$

$$y_P=t_P.y_T+u_P.y_U+y_Q$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U \\ y_T & y_U \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix}$$

- Usando coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Para resolver o problema inverso:

$$\begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações em 3D

- Vetores e pontos em 3D

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformação linear afim

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Rígidas

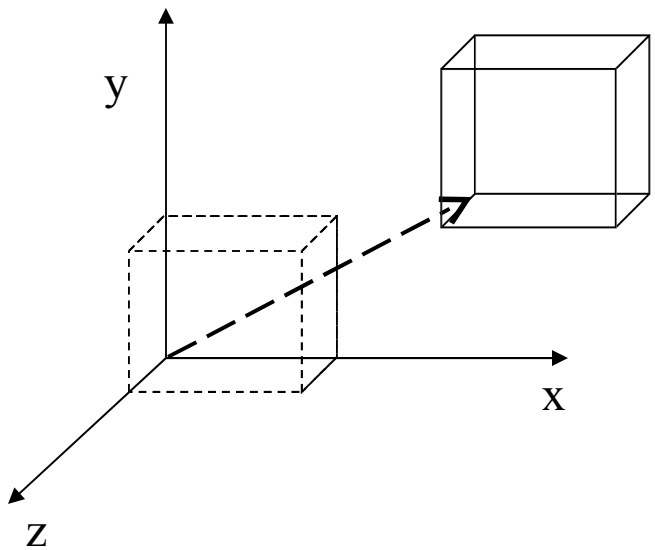
- Não modificam a forma (dimensões/ângulos) do objeto
- São compostas de uma rotação e uma translação

Submatriz de Rotação

Vetor de Translação

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translação



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

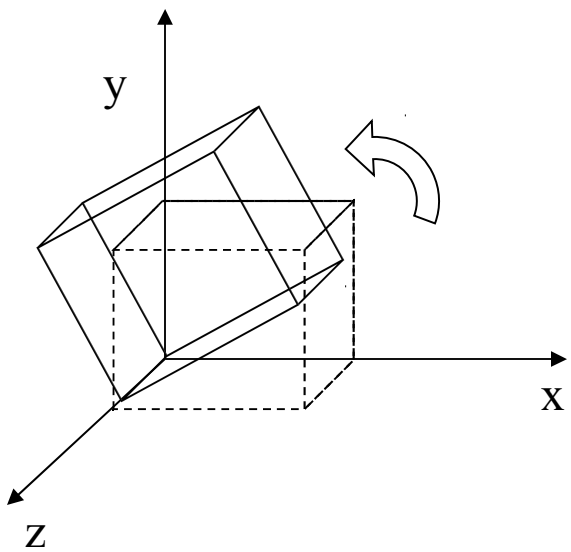
$$P' = T \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + t_x \\ P_y + t_y \\ P_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix} = P + t$$

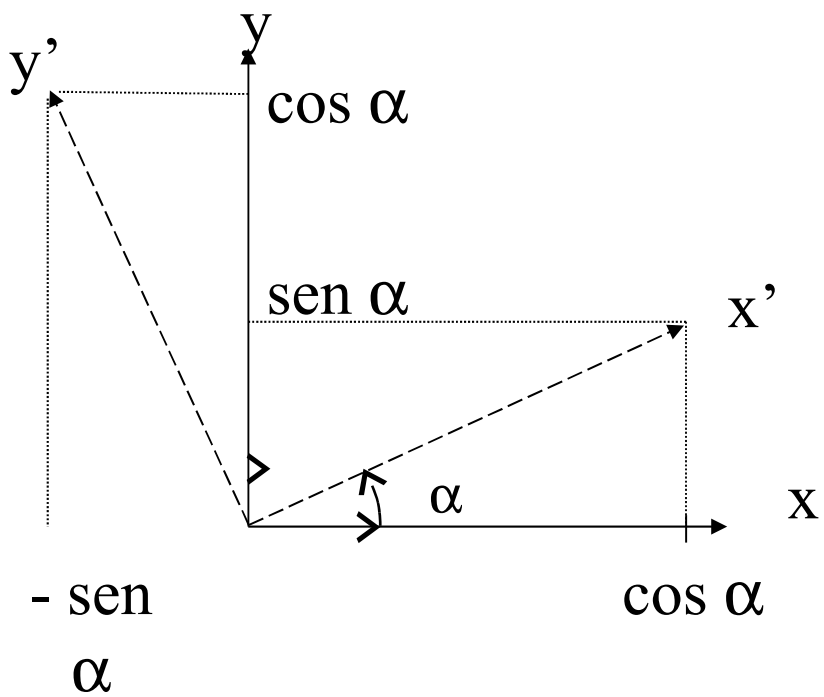
- Observe que translações são comutativas:

  P + t + v = P + v + t

Rotação em torno do eixo *Z*

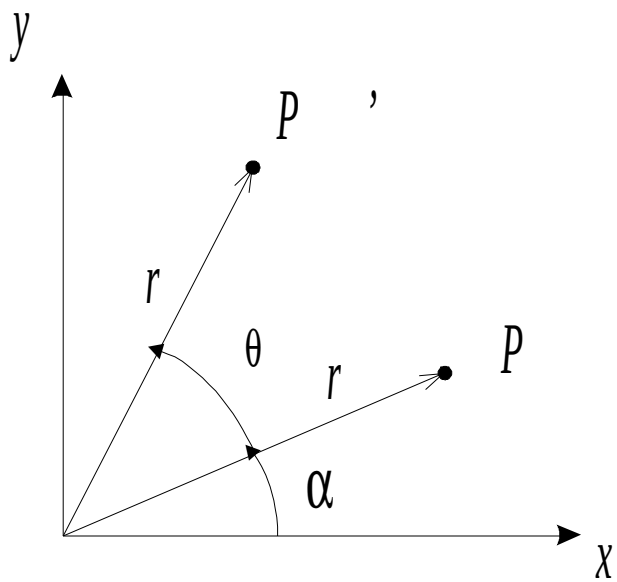
- Podemos ver que o vetor $(1,0,0)^T$ é mapeado em $(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha, 0)^T$ e que o vetor $(0,1,0)^T$ é mapeado em $(-\text{sen}\,\alpha, \cos\alpha, 0)^T$





Rotação em torno do eixo *Z*

- Outra maneira de ver:



- Sabemos que

$$P_x = r\cos\alpha \qquad P'_x = r\cos(\alpha+\theta)$$

$$P_y = r\sin\alpha \qquad P'_y = r\sin(\alpha+\theta)$$

- Então

$$P'_x = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

$$P'_y = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$$

- Ou, finalmente,

$$P'_x = P_x\cos\theta - P_y\sin\theta$$

$$P'_y = P_x\sin\theta + P_y\cos\theta$$

Rotação em torno dos eixos coordenados

- Rotação em torno de Z é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Similarmente, em torno dos eixos X e Y

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotações em geral

- Qualquer rotação pode ser definida por um eixo de rotação dado pelo vetor unitário **u** = $(x, y, z)^T$ e um ângulo de rotação α
- Seja S a matriz

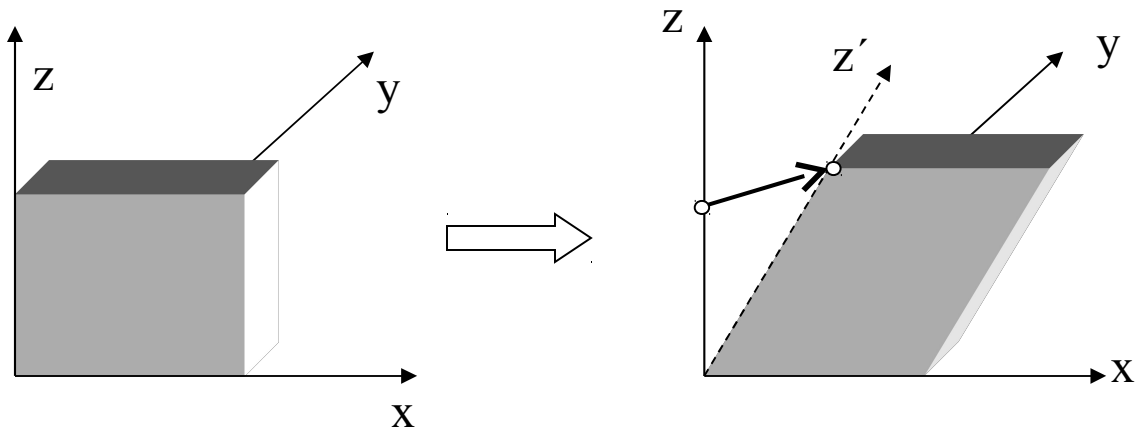
$$S = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

- Então a submatriz de Rotação M é dada por

$$M = \mathrm{u}\mathrm{u}^T + (\cos\alpha)(I - \mathrm{u}\mathrm{u}^T) + (\sin\alpha)S$$

Inclinação (“*shear*”)

- É uma transformação de deformação onde um eixo é “entortado” em relação aos demais

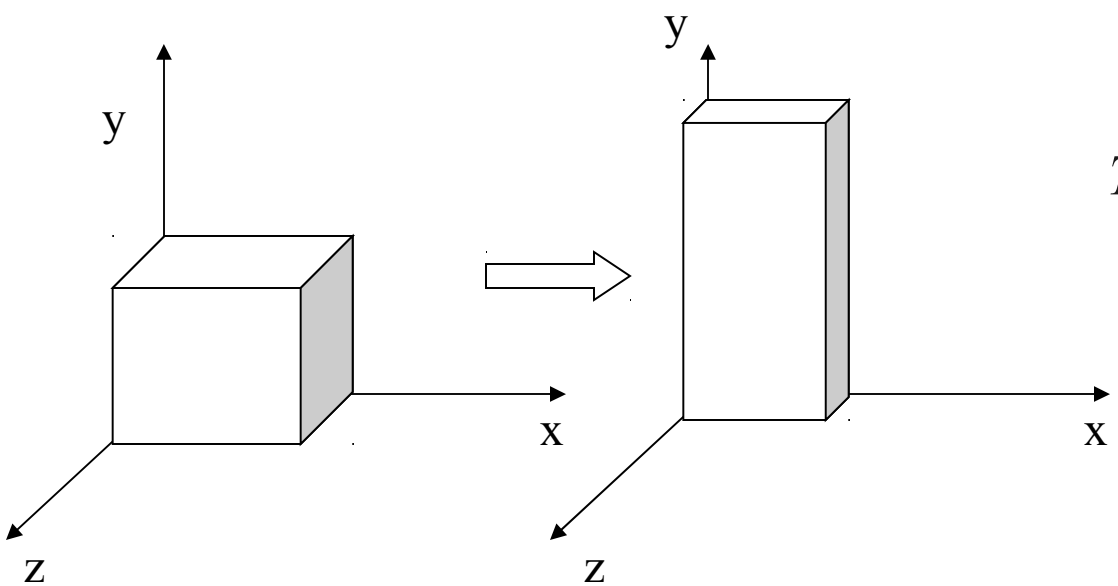


- Se o vetor unitário do eixo z é levado em $[Sh_x\ Sh_y\ 1\ 0]^T$, então a matriz de transformação é dada por

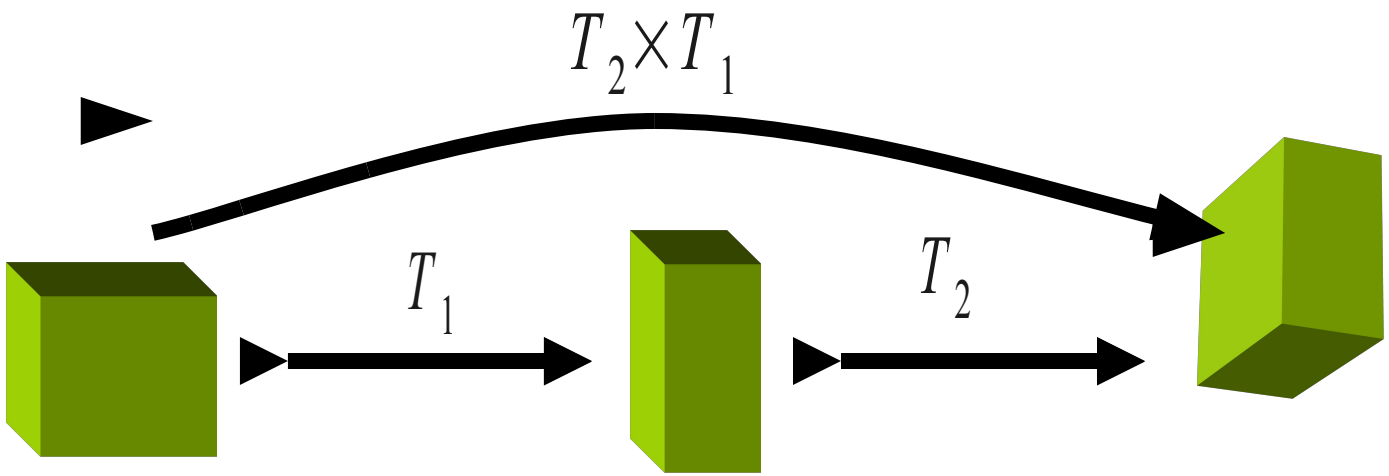
$$T_{inclinação} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & Sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

- Especificada por três fatores (S_x, S_y, S_z) que multiplicam os vetores unitários x, y, z
- Escala não é uma transformação rígida,
- Escala uniforme ($S_x = S_y = S_z$) entretanto, é uma operação ortogonal ou homotética, isto é, preserva os ângulos
- Para obter reflexão em torno do plano z=0, usar fatores de escala (1, 1, -1)



$$T_{escala} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações em 3D

- Em nossa notação, usamos pré-multiplicação:
  - $P' = T \times P$
- Para compor 2 transformações temos:
  - Se $P' = T_1 \times P$ e $P'' = T_2 \times P'$, então, $P'' = T_2 \times T_1 \times P$