Introdução à Computação Gráfica Geometria

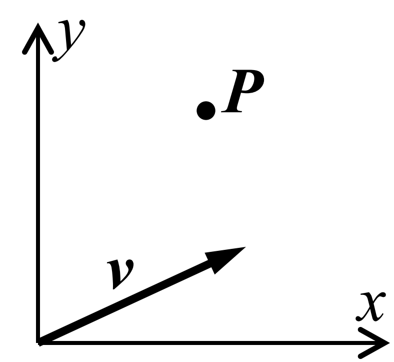
Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Pontos e Vetores (2D)

- Ponto: Denota posição no plano
- Vetor: Denota deslocamento, isto é, inclui a noção de direção e magnitude
- Ambos são normalmente expressos por pares de coordenadas (em 2D) mas <u>não são a “mesma coisa”</u>

$$P = (x_P, y_P)$$

$$\vec{v} = (x_v, y_v)$$



Operações com Pontos e Vetores (2D)

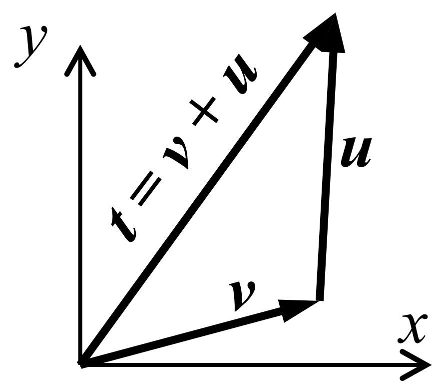
- Soma de vetores

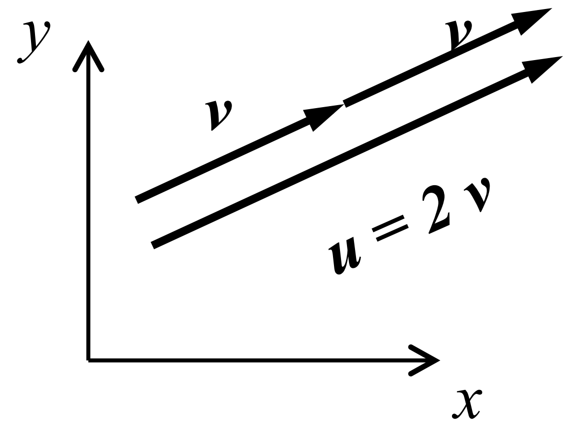
  $t = v + u$
- Multiplicação de vetor por escalar

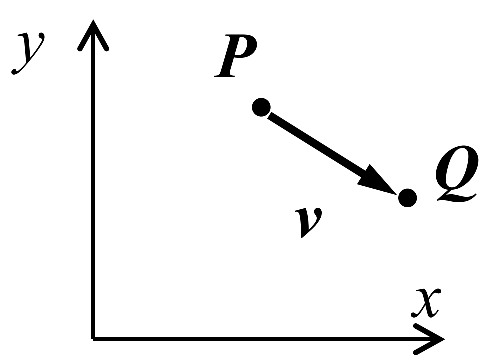
  $u = 2\,v$
- Subtração de pontos

  $v = Q - P$
- Soma de ponto com vetor

  $Q = P + v$







Transformações

- Transformação é uma função que mapeia pontos de um espaço Euclidiano em outros (ou possivelmente os mesmos) pontos do mesmo espaço.
- Se uma transformação é linear, então
  - Se um conjunto de pontos está contido em uma reta, depois de transformados eles também estarão contidos sobre uma reta.
  - Se um ponto P guarda uma relação de distância com dois outros pontos Q e R, então essa relação de distância é mantida pela transformação.
- Transformação mapeia origem na origem?
  - Sim: Transformação *Linear*
  - Não: Transformação *Linear Afim*: Translações são permitidas

Transformações Lineares em 2D

- Uma transformação linear

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

- Uma transformação linear afim

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

Forma Matricial

- Mais conveniente para uso em um computador. Sejam

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

- Então uma transformação linear afim pode ser escrita $T(P) = P'$ onde

$$P' = A \times P + D$$

Transformando Vetores

- Um vetor não está atrelado a um ponto no espaço
- Uma transformação linear afim aplicada a um vetor não inclui translação
- Prova: Seja V um vetor e V' sua imagem sob a transformação linear afim, então:

$$V = Q - P \Leftrightarrow V' = Q' - P'$$

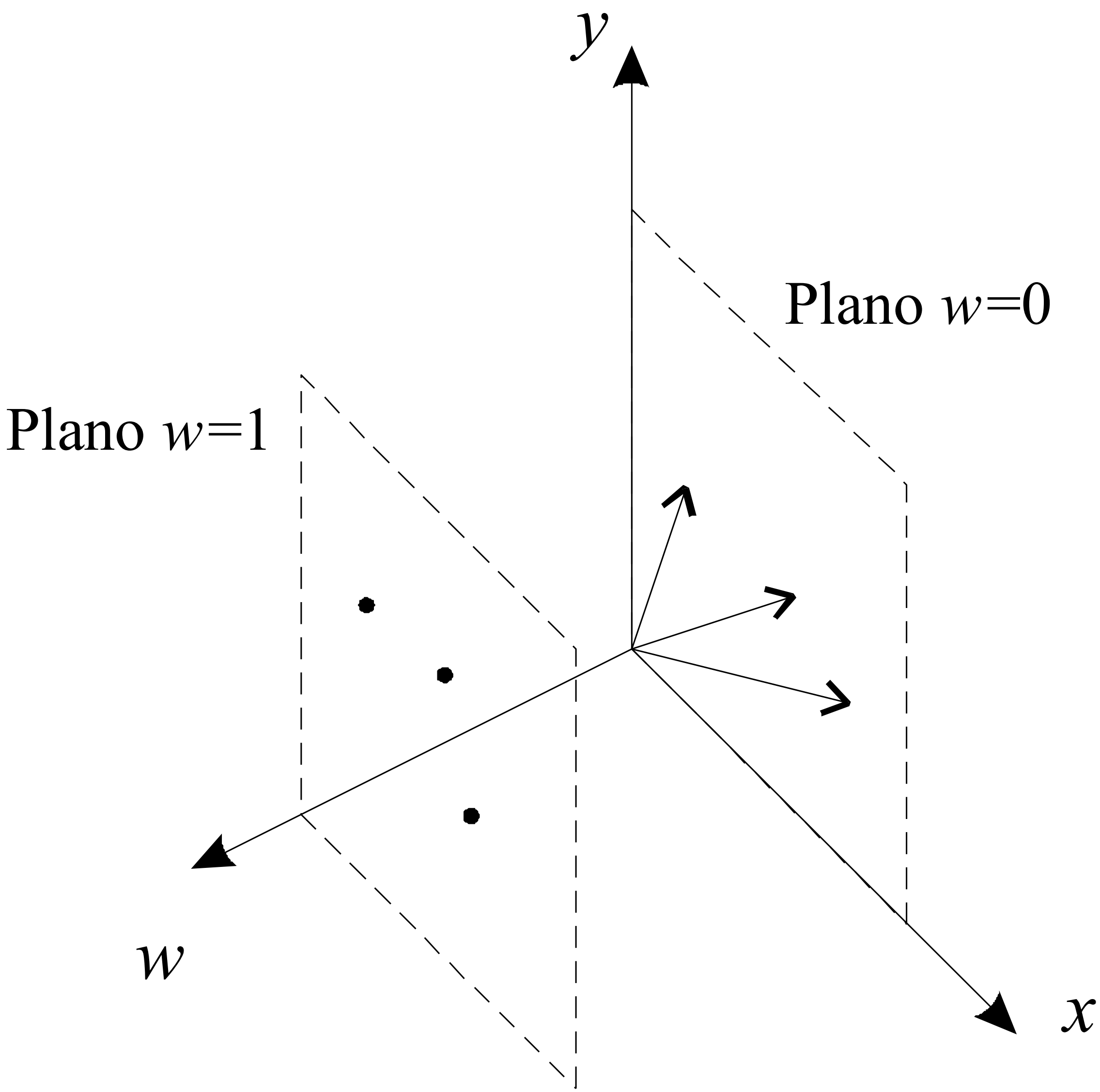
$$\begin{aligned} V' &= Q' - P' \\ &= (A \times Q + D) - (A \times P + D) \\ &= A \times (Q - P) \\ &= A \times V \end{aligned}$$

Coordenadas Homogêneas

- A transformação de vetores é operacionalmente diferente da de pontos.
- Coordenadas homogêneas permitem unificar o tratamento.
- Problema é levado para uma dimensão superior:
  - w = 0 para vetores e w = *1* para pontos.
  - Termos independentes formam uma coluna extra na matriz de transformação.

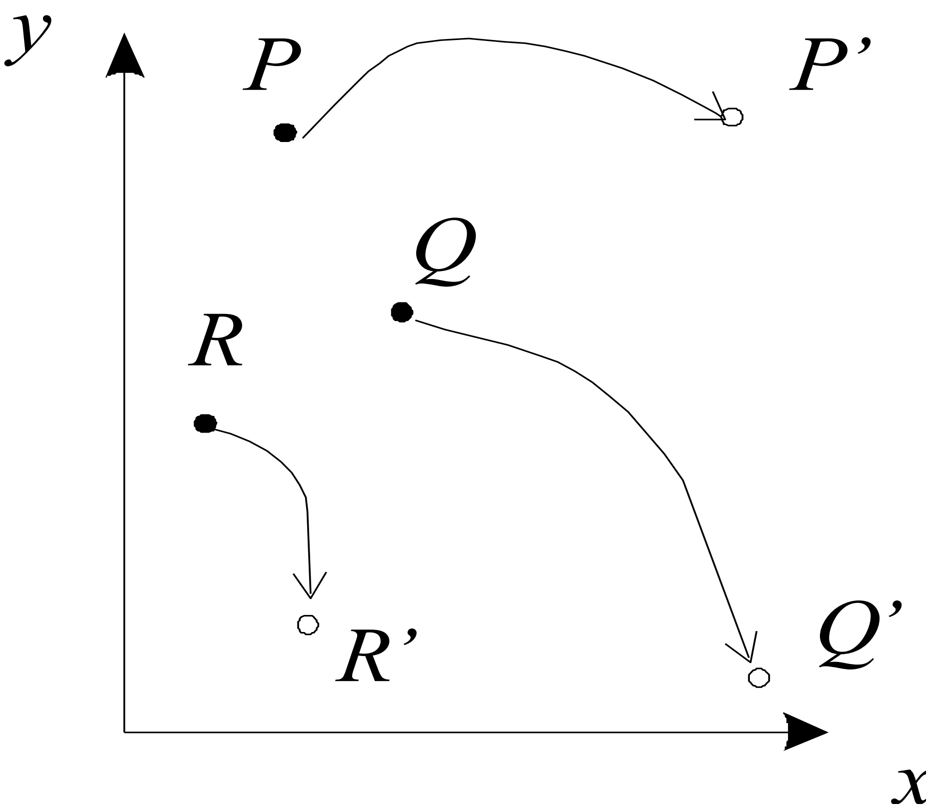
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas - Interpretação



Modelando Transformações

- Uma transformação linear afim em 2D pode ser definida a partir da imagem de 3 pontos:



$$\begin{cases} x_{P'} = a.x_P + b.y_P + e \\ y_{P'} = c.x_P + d.y_P + f \\ x_{Q'} = a.x_Q + b.y_Q + e \\ y_{Q'} = c.x_Q + d.y_Q + f \\ x_{R'} = a.x_R + b.y_R + e \\ y_{R'} = c.x_R + d.y_R + f \end{cases}$$

Sistemas de coordenadas

- Um sistema de coordenadas para $\mathbf{R}^n$ é definido por um ponto (origem) e n vetores
- Ex. Seja um sistema de coordenadas para $\mathbf{R}^2$ definido pelo ponto O e os vetores X e Y. Então,
  - Um ponto P é dado por coordenadas x_P e y_P tais que

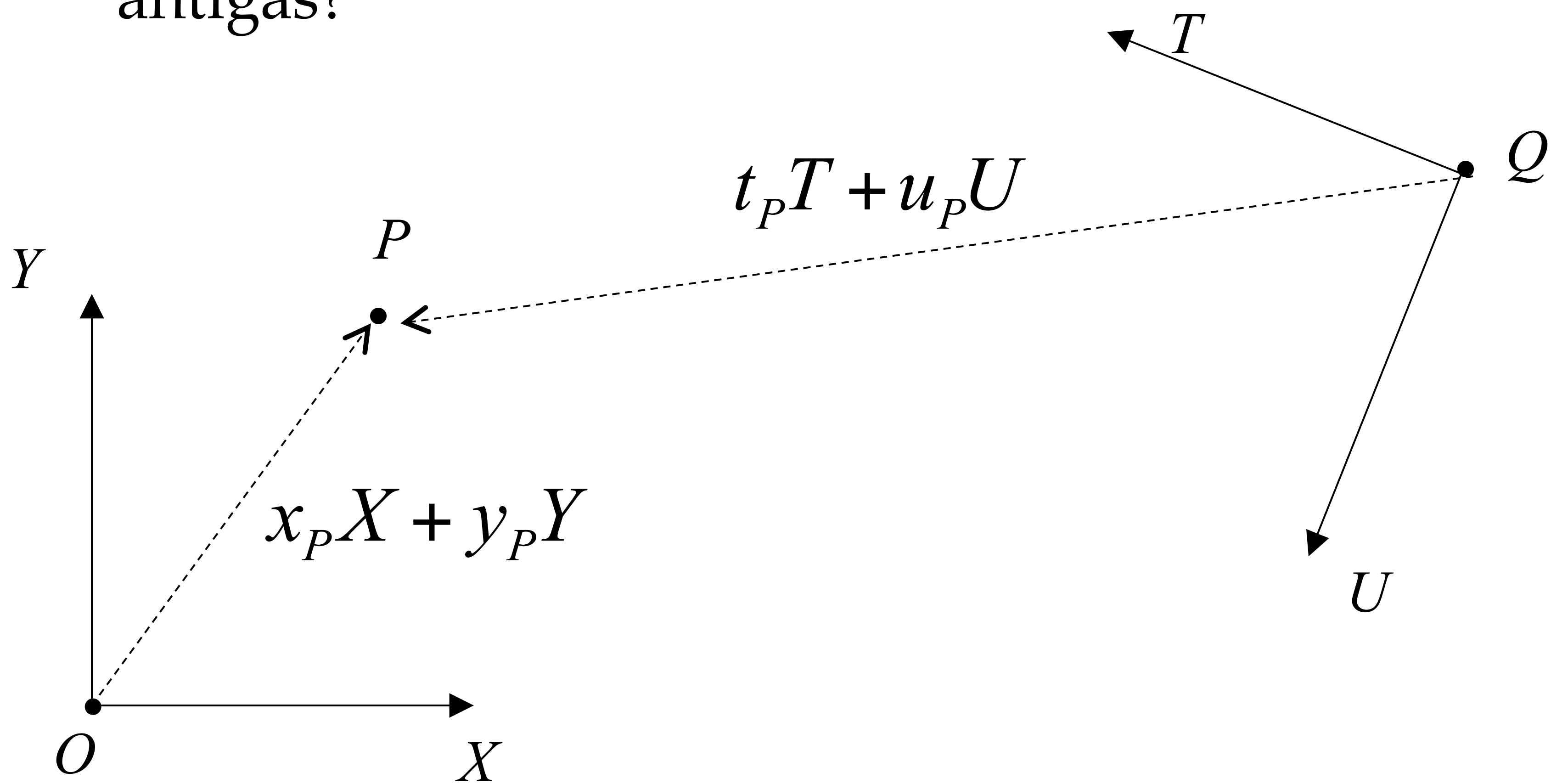
$$P = x_P.X + y_P.Y + O$$

  - Um vetor V é dado por coordenadas x_V e y_V tais que

$$V = x_V.X + y_V.Y$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Se estabelecemos um outro sistema (ex.: Q/T/U), como computar as novas coordenadas dadas as antigas?



Mudança de Sistema de Coordenadas

- Como computar as coordenadas de um ponto $P = (x_P, y_P)$ em O/X/Y dadas as coordenadas de P em Q/T/U, isto é, (t_P, u_P) ?

$$\begin{aligned} P &= t_P.T + u_P.U + Q \\ &= t_P.(x_T.X + y_T.Y) + u_P.(x_U.X + y_U.Y) + (x_Q.X + y_Q.Y + O) \\ &= (t_P.x_T + u_P.x_U + x_Q).X + (t_P.y_T + u_P.y_U + y_Q).Y + O \end{aligned}$$

Logo,

$$x_P = t_P.x_T + u_P.x_U + x_Q$$

$$y_P = t_P.y_T + u_P.y_U + y_Q$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U \\ y_T & y_U \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix}$$

- Usando coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Para resolver o problema inverso:

$$\begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações em 3D

- Vetores e pontos em 3D

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformação linear afim

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Rígidas

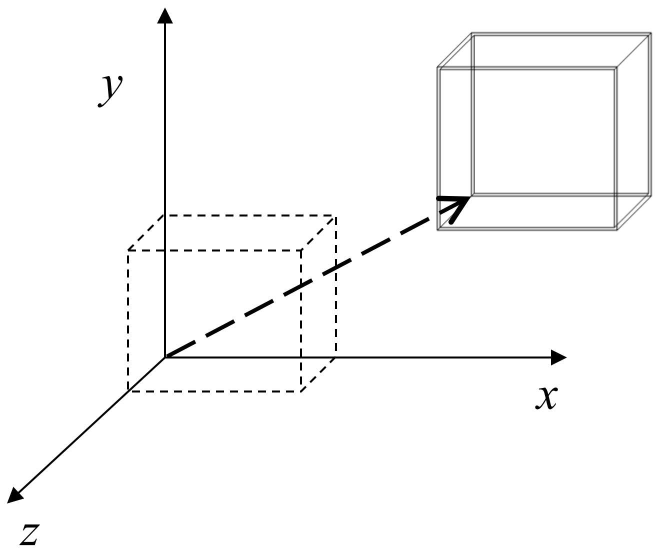
- Não modificam a forma (dimensões /ângulos) do objeto
- São compostas de uma rotação e uma translação

Submatriz de Rotação

Vetor de Translação

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translação



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + t_x \\ P_y + t_y \\ P_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix} = P + t$$

- Observe que translações são comutativas:

  $$P + t + v = P + v + t$$

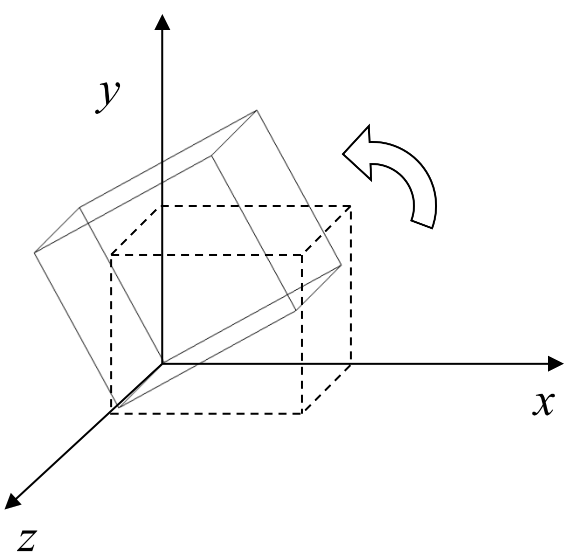
Rotação em torno do eixo *Z*

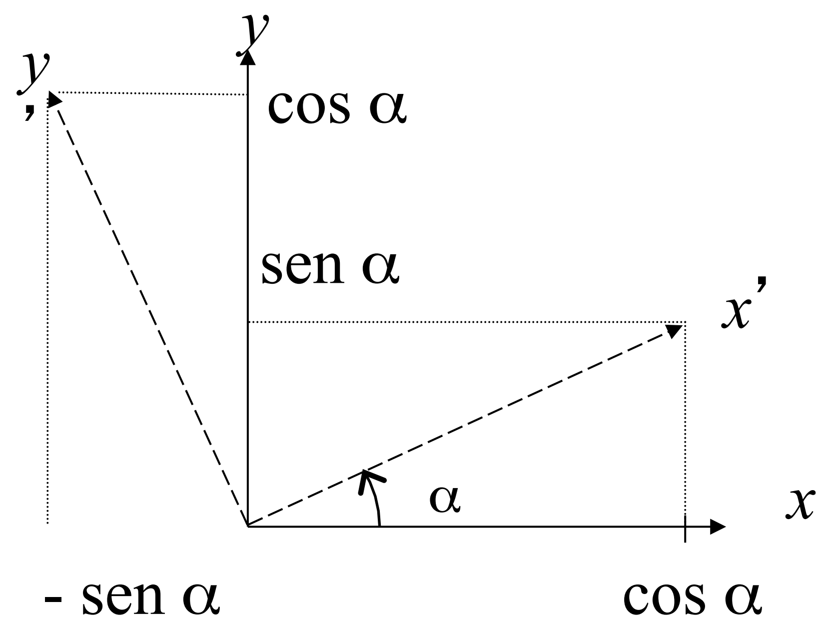
- Podemos ver que o vetor $(1,0,0)^T$ é mapeado em:

  $(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha, 0)^T$

- e que o vetor $(0,1,0)^T$ é mapeado em:

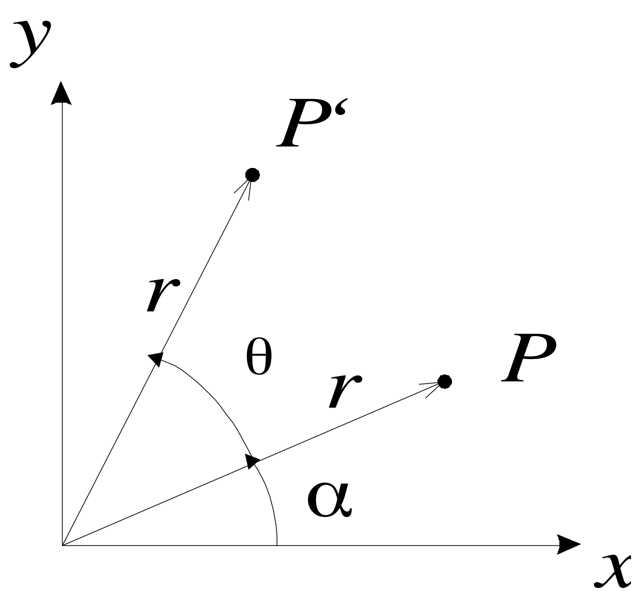
  $(-\text{sen}\,\alpha, \cos\alpha, 0)^T$





Rotação em torno do eixo Z

- Outra maneira de ver:



- Sabemos que

$$P_x = r\cos\alpha \qquad P'_x = r\cos(\alpha+\theta)$$

$$P_y = r\sin\alpha \qquad P'_y = r\sin(\alpha+\theta)$$

- Então

$$P'_x = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$$

$$P'_y = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$$

- Ou, finalmente,

$$P'_x = P_x\cos\theta - P_y\sin\theta$$

$$P'_y = P_x\sin\theta + P_y\cos\theta$$

Rotação em torno dos eixos coordenados

- Rotação em torno de Z é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Similarmente, em torno dos eixos X e Y

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotações em geral

- Qualquer rotação pode ser definida por um eixo de rotação dado pelo vetor unitário

  $\mathbf{u} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ e um ângulo de rotação α

- Seja S a matriz

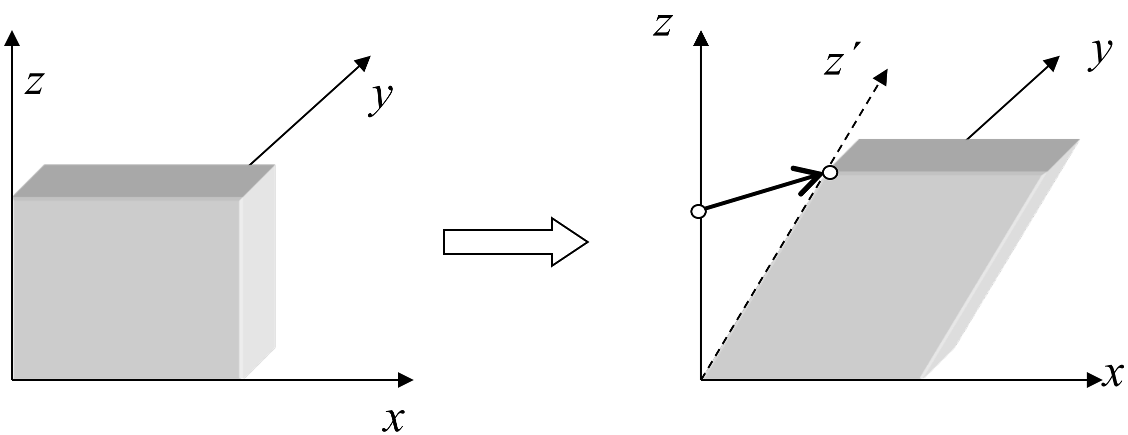
$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

- Então a submatriz de Rotação M é dada por

$$\mathrm{M} = \mathrm{uu}^{\mathrm{T}} + (\cos\alpha)(\mathrm{I} - \mathrm{uu}^{\mathrm{T}}) + (\sin\alpha)\mathrm{S}$$

Inclinação ("*shear*")

- É uma transformação de deformação onde um eixo é "entortado" em relação aos demais

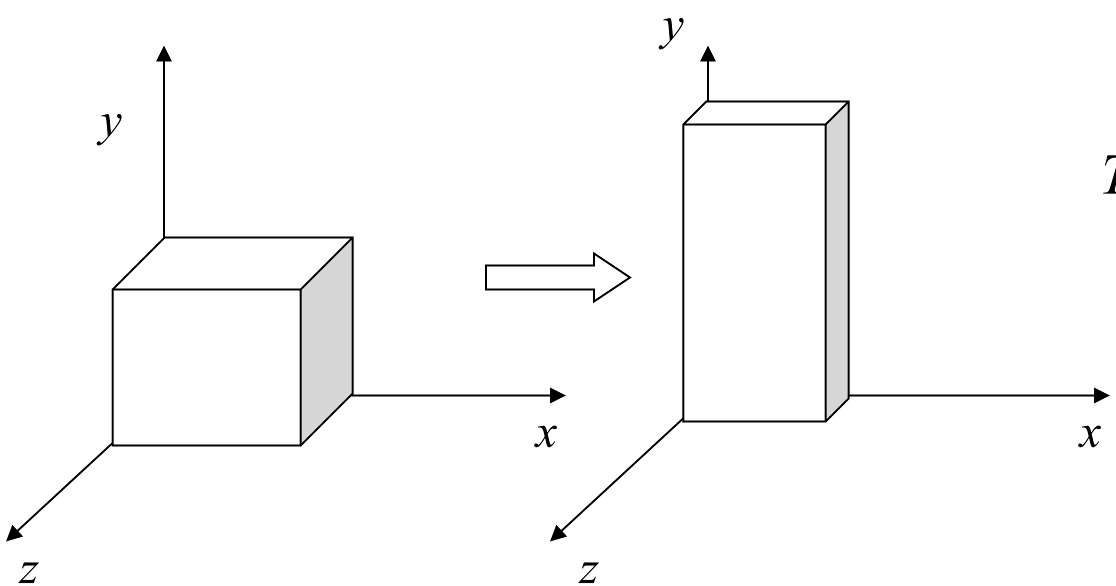


- Se o vetor unitário do eixo z é levado em $[Sh_x \; Sh_y \; 1 \; 0]^T$, então a matriz de transformação é dada por

$$T_{inclinação} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & Sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

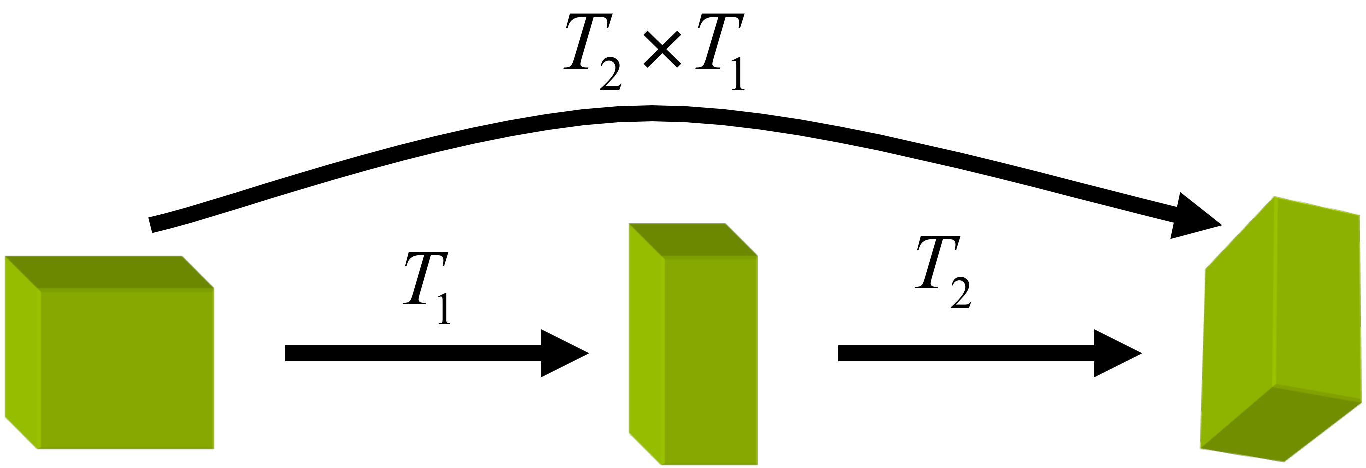
- Especificada por três fatores (S_x, S_y , S_z) que multiplicam os vetores unitários x, y, z.
- Escala não é uma transformação rígida,
- Escala uniforme ($S_x = S_y = S_z$) entretanto, é uma operação ortogonal ou homotética, isto é, preserva os ângulos.
- Para obter reflexão em torno do plano $z = 0$, usam-se fatores de escala (1, 1, -1).



$$T_{escala} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações em 3D

- Em nossa notação, usamos pré-multiplicação:
  - $P' = T \times P$
- Para compor 2 transformações temos:
  - Se $P' = T_1 \times P$ e $P'' = T_2 \times P'$, então, $P'' = T_2 \times T_1 \times P$



Geometria Afim

- Composta dos elementos básicos
  - escalares
  - pontos - denotam posição
  - vetores - denotam deslocamento (direção e magnitude)
- Operações
  - escalar · vetor = vetor
  - vetor + vetor ou vetor – vetor = vetor
  - ponto – ponto = vetor
  - ponto + vetor ou ponto – vetor = ponto

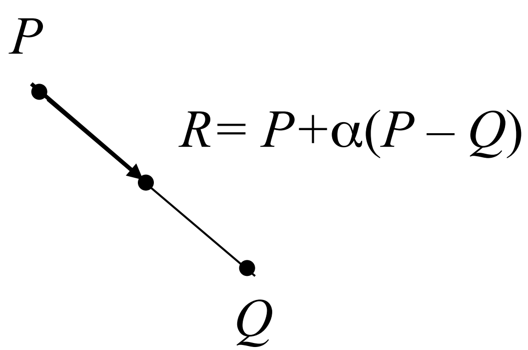
Combinações Afim

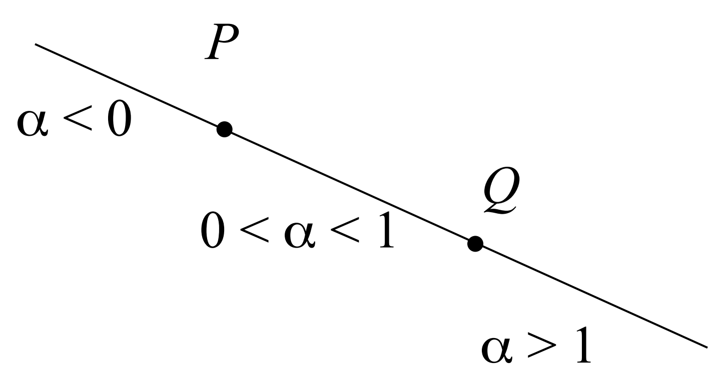
- Maneira especial de combinar pontos

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$$

$$\text{onde } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

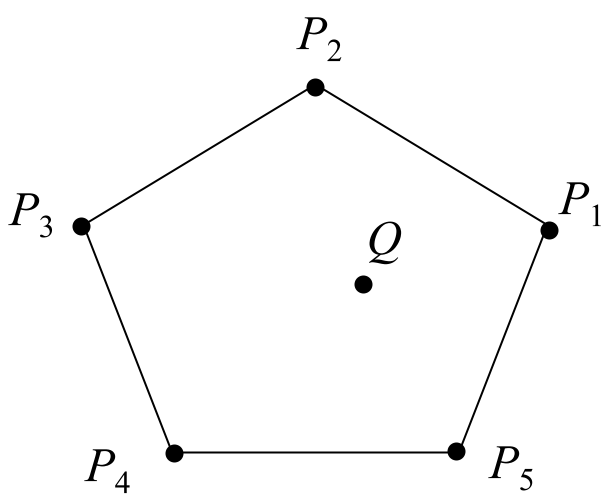
- Para 2 pontos P e Q poderíamos ter uma combinação afim $R = (1 - \alpha)P + \alpha Q = P + \alpha(Q - P)$





Combinações Convexas

- Combinações afim onde se garante que todos os coeficientes α_i são positivos (ou zero)
- Usa-se esse nome porque qualquer ponto que é uma combinação convexa de *n* outros pontos pertence à <u>envoltória convexa</u> desses pontos



Geometria Euclidiana

- Extensão da geometria afim pela adição de um operador chamado *produto interno*
- Produto interno é um operador que mapeia um par de vetores em um escalar. Tem as seguintes propriedades:
  - Positividade : $(u,u) \geq 0$ e $(u,u) = 0$ sse $u=0$
  - Simetria: $(u,v) = (v,u)$
  - Bilinearidade: $(u,v+w)= (u,v)+ (u,w)$ e

    $$(u,\alpha v)= \alpha(u,v)$$

Geometria Euclidiana

- Normalmente usamos o produto escalar como operador de produto interno:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{d} u_i v_i$$

- Comprimento de um vetor é definido como:

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- Vetor unitário (normalizado):

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$

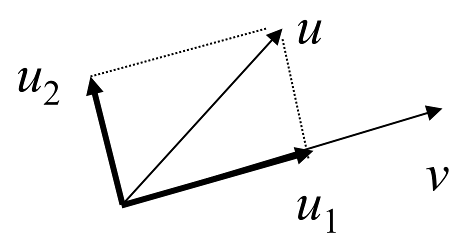
Geometria Euclidiana

- Distância entre dois pontos P e $Q = |P - Q|$
- O ângulo entre dois vetores pode ser determinado por

$$\hat{a}ngulo(\vec{u},\vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}(\hat{u}\cdot\hat{v})$$

- Projeção ortogonal: dados dois vetores u e v, deseja-se decompor u na soma de dois vetores u_1 e u_2 tais que u_1 é paralelo a v e u_2 é perpendicular a v

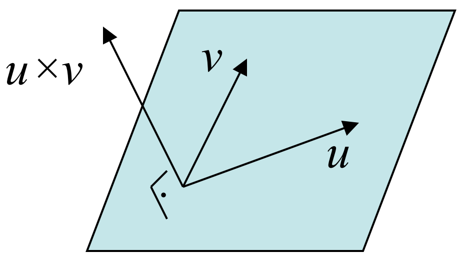
$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v} \qquad \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1$$



Produto Vetorial (3D)

- Permite achar um vetor perpendicular a outros dois dados
- Útil na construção de sistemas de coordenadas

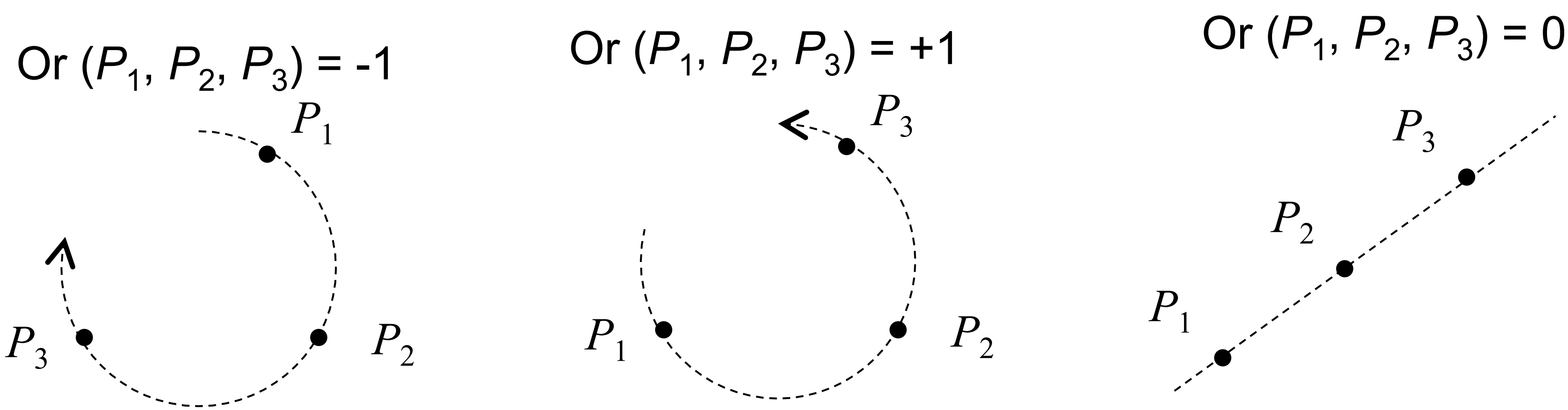
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$



- Propriedades (assume-se *u*, *v* linearmente independentes):
  - Antisimetria: $u \times v = - v \times u$
  - Bilinearidade: $u \times (\alpha v) = \alpha\, (u \times v)$ e $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
  - $u \times v$ é perpendicular tanto a u quanto a v
  - O comprimento de $u \times v$ é igual a área do paralelogramo definido por u e v, isto é, $| u \times v | = | u | \, | v | \sin \theta$

Orientação

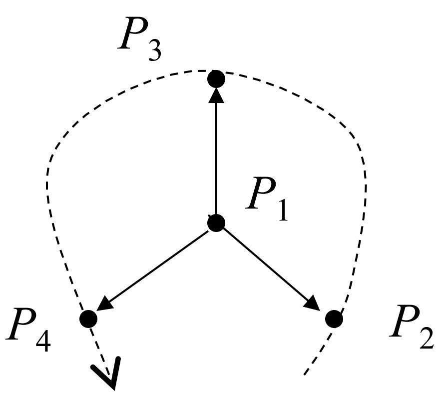
- Orientação de 2 pontos em 1D
  - $P_1 < P_2$, $P_1 = P_2$ ou $P_1 > P_2$
- Orientação de 3 pontos em 2D
  - O percurso P_1 , P_2 , P_3 é feito no sentido dos ponteiros do relógio, no sentido contrário ou são colineares



Orientação

- Orientação de 4 pontos em 3D
  - O percurso P_1 , P_2 , P_3 , P_4 define um parafuso segundo a regra da mão direita, mão esquerda ou são coplanares

Or (P_1, P_2, P_3, P_4) = +1



- *O conceito pode ser estendido a qualquer número de dimensões ...*

Computando orientação

- A orientação de n+1 pontos no R^n é dado pelo sinal do determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas homogêneas dos pontos *com o 1 vindo primeiro*

$$\mathrm{Or}_2(P_1, P_2, P_3) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right)$$

$$\mathrm{Or}_3(P_1, P_2, P_3, P_4) = \mathrm{sign}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \right)$$