

Transformações Geométricas em C.G.

Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Geometria Euclideana

- Geometria
 - ◆ Sintética: Axiomas e Teoremas
 - ◆ Por coordenadas: Álgebra Linear
- Geometria Euclideana
 - ◆ Espaço Vetorial + Produto Interno

$$\mathbb{R}^3 + \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

Transformações

- Geometria Euclideana
 - ◆ Movimentos rígidos + transf. de semelhança.
 - ◆ Conceitos: congruência e semelhança.
- Geometria Afim
 - ◆ Transf. Lineares + translações.
 - ◆ Conceitos: razões e proporções.

Transformações Lineares

- Definição
 - ◆ $T(x + y) = T(x) + T(y)$
 - ◆ $T(\lambda x) = \lambda T(x)$
- ◆ Conjunto de todos os operadores lineares em R^n forma um espaço vetorial de dimensão n^2 .
- ◆ Existe um isomorfismo entre a álgebra dos operadores lineares em R^n , determinado por uma base, sobre a álgebra das matrizes quadradas $n \times n$.

Basta Aplicar T aos Vetores da Base

$$v = \sum_{i=1}^n v_i u_i, u_i = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n v_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n v_i T(u_i)$$

$$T(v) = (T(u_1), T(u_2), T(u_3)) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{11} & u'_{21} & u'_{31} \\ u'_{12} & u'_{22} & u'_{32} \\ u'_{13} & u'_{23} & u'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

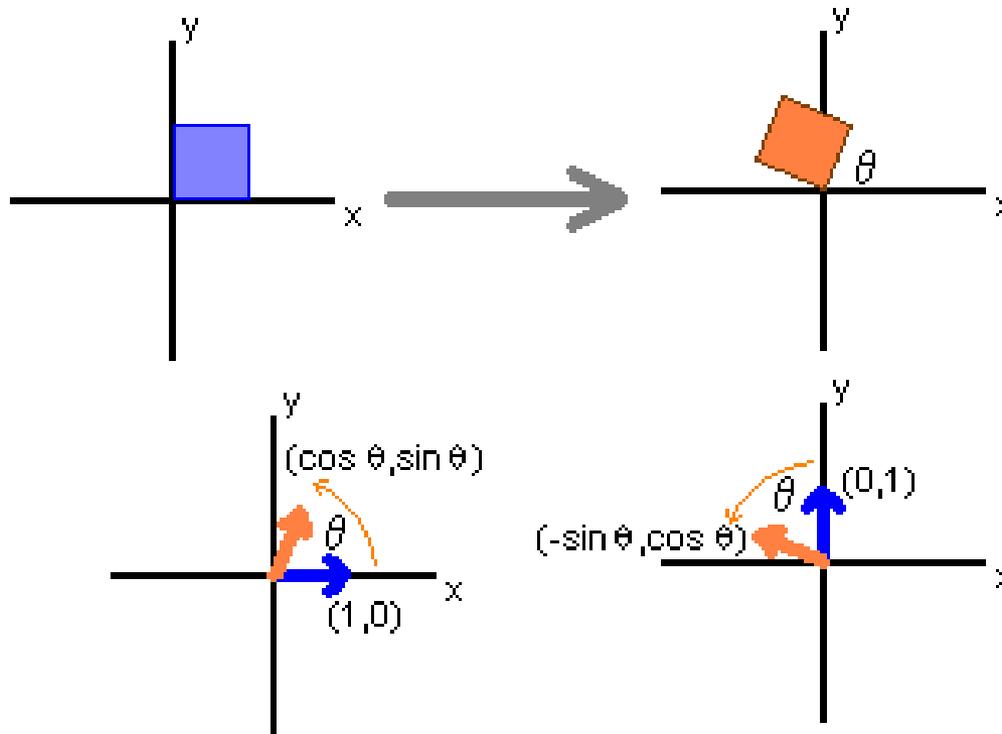
Transformações Lineares Bidimensionais

- A origem é o único ponto fixo.
 - ♦ Logo, a translação não é uma transformação linear.
- São representadas por matrizes 2×2 .

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

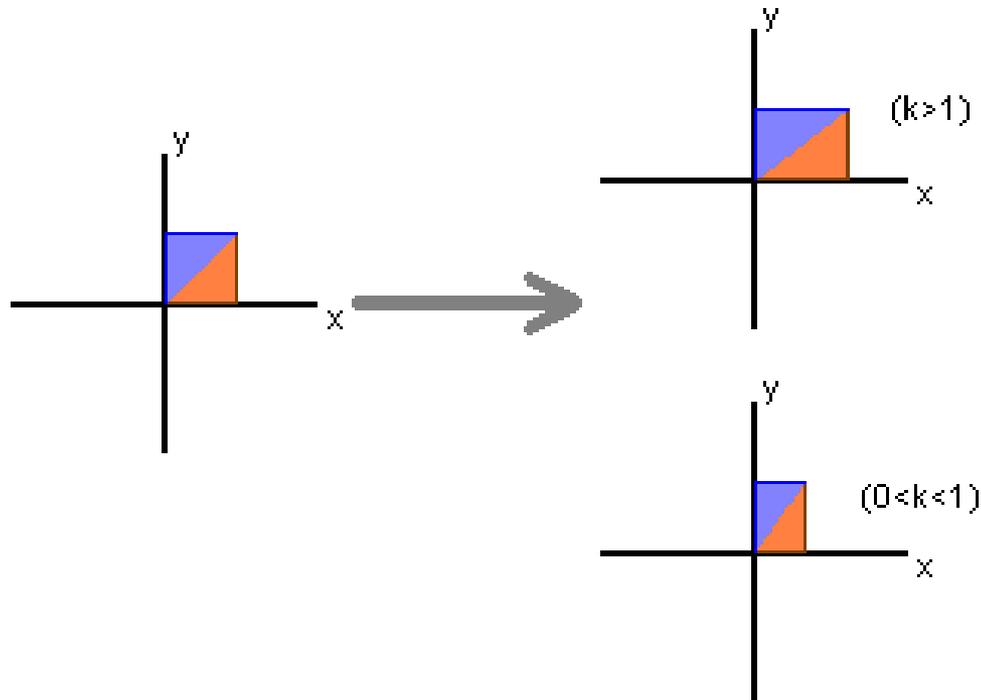
Rotação

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



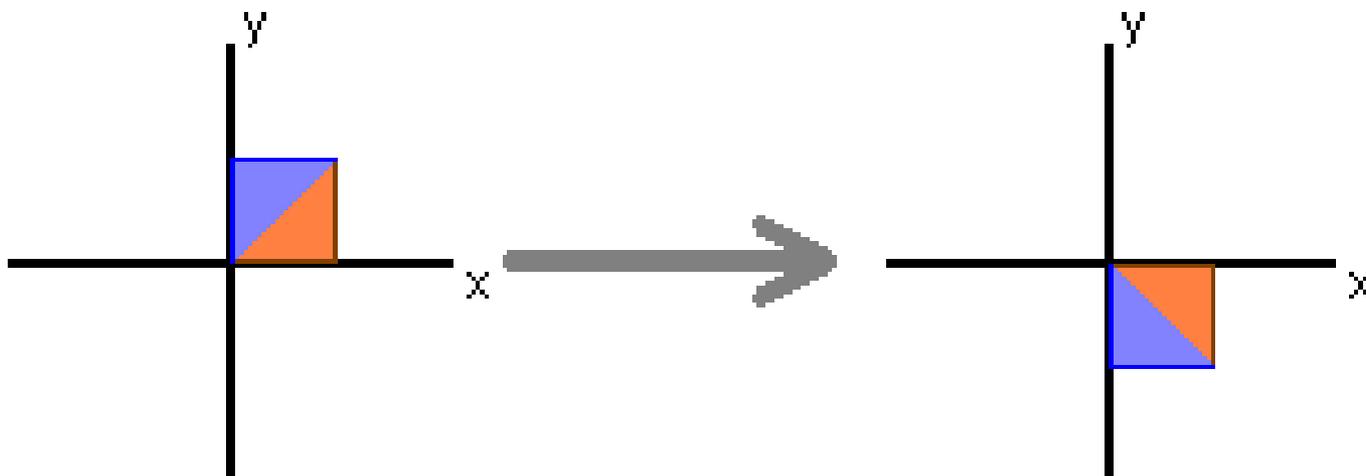
Escala

$$S_x = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



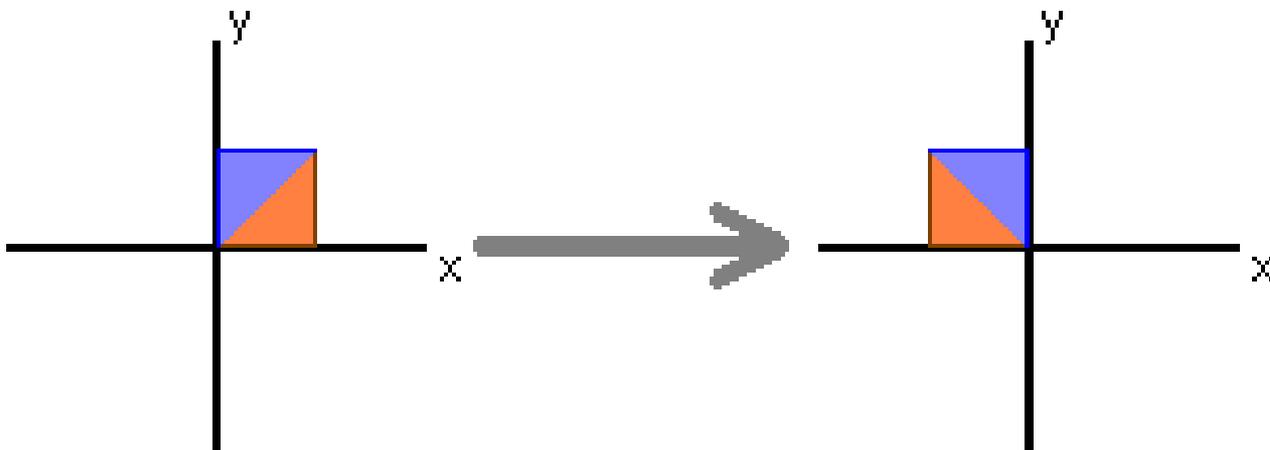
Reflexão em Relação ao Eixo X

$$Rfl_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



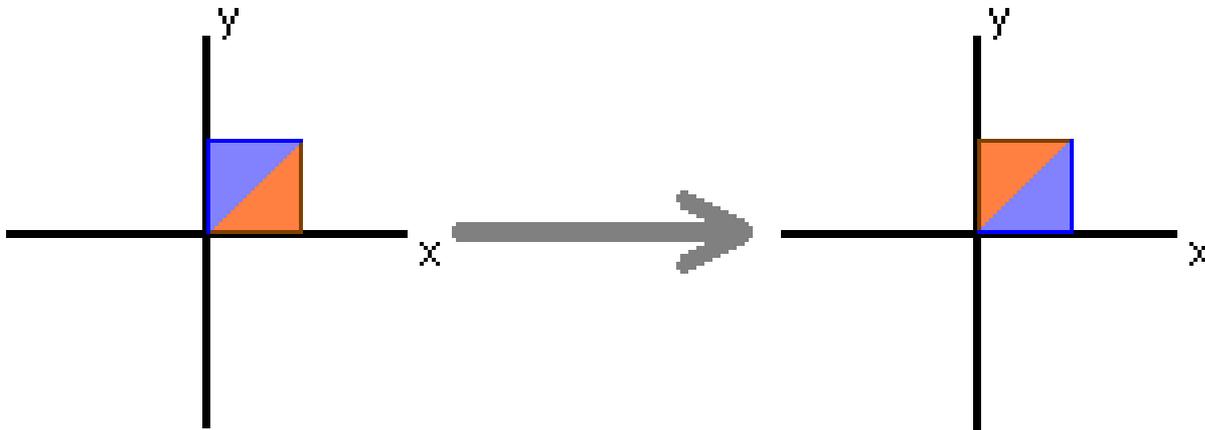
Reflexão em Relação ao Eixo Y

$$Rfl_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



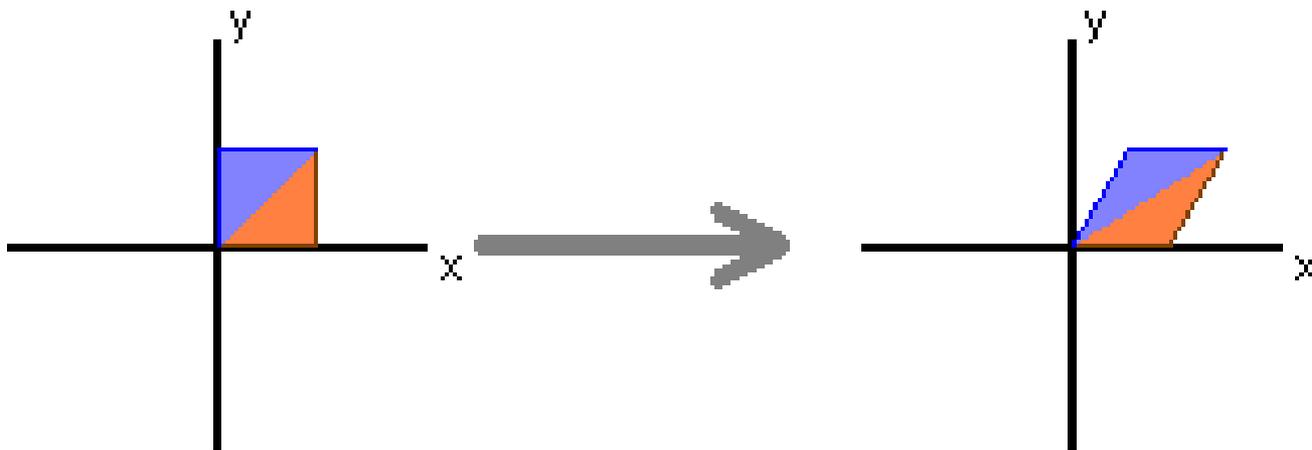
Reflexão em Relação à Reta $y = x$

$$Rfl_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



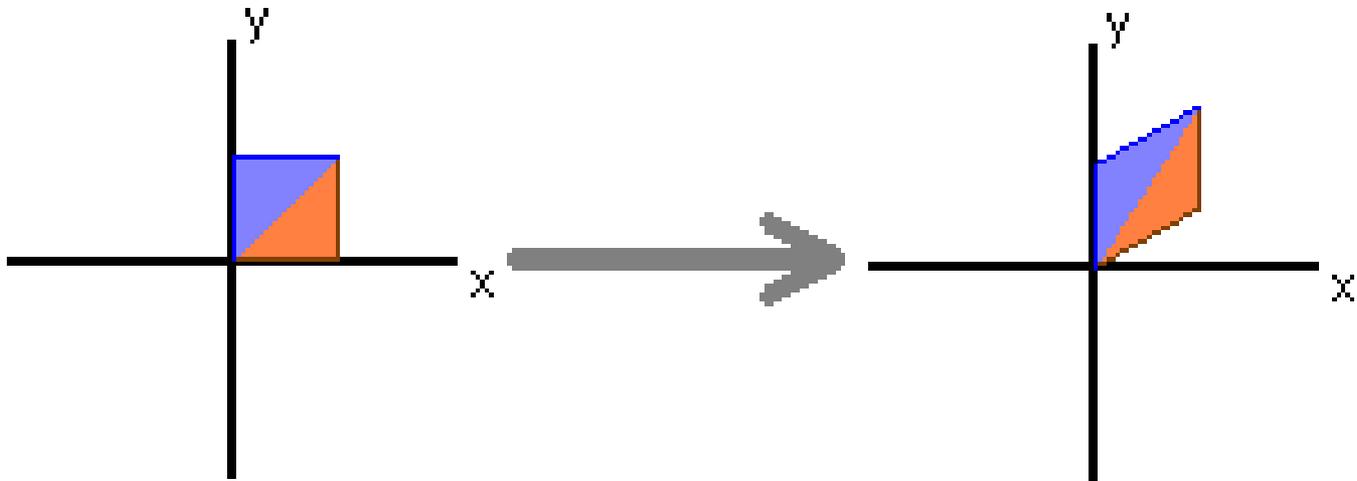
Cisalhamento em X

$$C_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Cisalhamento em Y

$$C_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Transformações Rígidas

- Rotações, Reflexões e Translações.
 - ◆ Preservam ângulos e comprimentos.
 - ◆ Matrizes Ortonormais.
 - ◆ Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^T$).
 - ◆ Isometrias do Espaço Euclideano.

$$a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = 0, ad - bc = 1$$

Isometrias do Plano

before translation

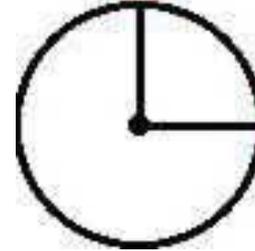


after translation

before rotation



angle = 90°



after rotation



before reflection

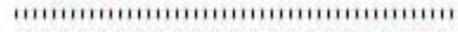


mirror line



after reflection

before glide reflection



mirror line



after glide reflection

Composição de Transformações

- Quando for necessário transformar um objeto em relação a um ponto P arbitrário:
 - ◆ Translada-se P para origem.
 - ◆ Aplicam-se uma ou mais transformações lineares elementares.
 - ◆ Aplica-se a transformação desejada.
 - ◆ Aplicam-se as transformações elementares inversas.
 - ◆ Aplica-se a translação inversa.

Plano Projetivo Real

- O plano projetivo RP^2 é o conjunto das retas do R^3 que passam pela origem.
- Um ponto do plano projetivo é definido como:

$$P = \{\lambda(x, y, z); \lambda \neq 0, (x, y, z) \neq (0,0,0)\}$$

- ◆ Denotado por $P = [x, y, z]$ em coordenadas homogêneas (uma classe de equivalência).
- ◆ Um ponto do RP^2 é uma reta do R^3 e uma reta do RP^2 é um plano do R^3 .
- ◆ Coordenadas homogêneas não fazem distinção entre pontos ideais (direções no plano afim) e pontos projetivos (pontos do plano afim).

Ponto Projetivo

- Considerando o plano $z = 1$ como o plano afim Euclidiano mergulhado em RP^2 :

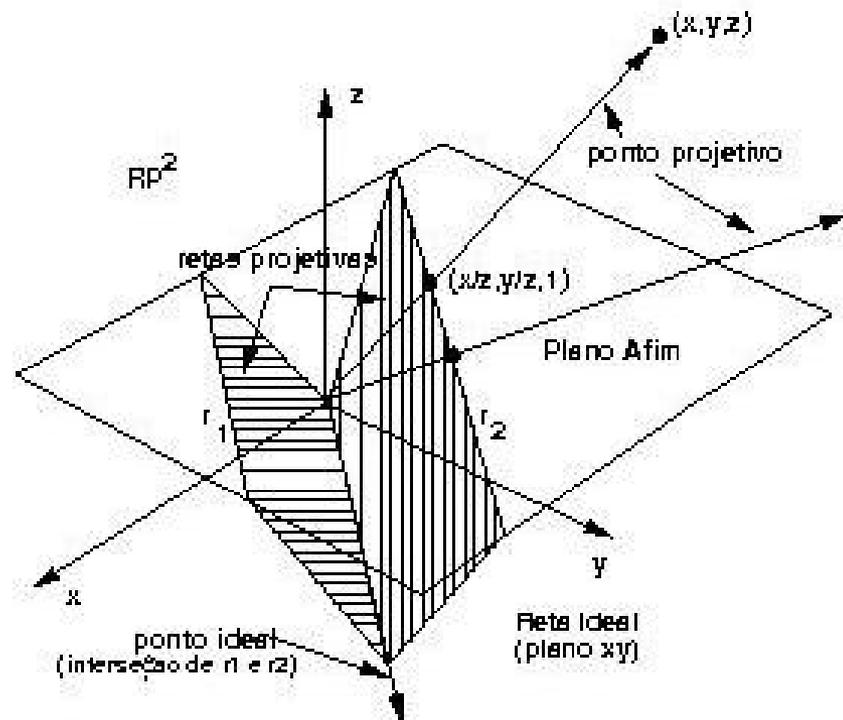
$$P = [x, y, z] \in RP^2, z \neq 0 \Rightarrow P = [x/z \quad y/z \quad 1]$$

- Representa a interseção da reta $\lambda(x, y, z)$ com o plano $z = 1$ ou $(\lambda = 1/z)$.
- Partição do plano projetivo em dois conjuntos:

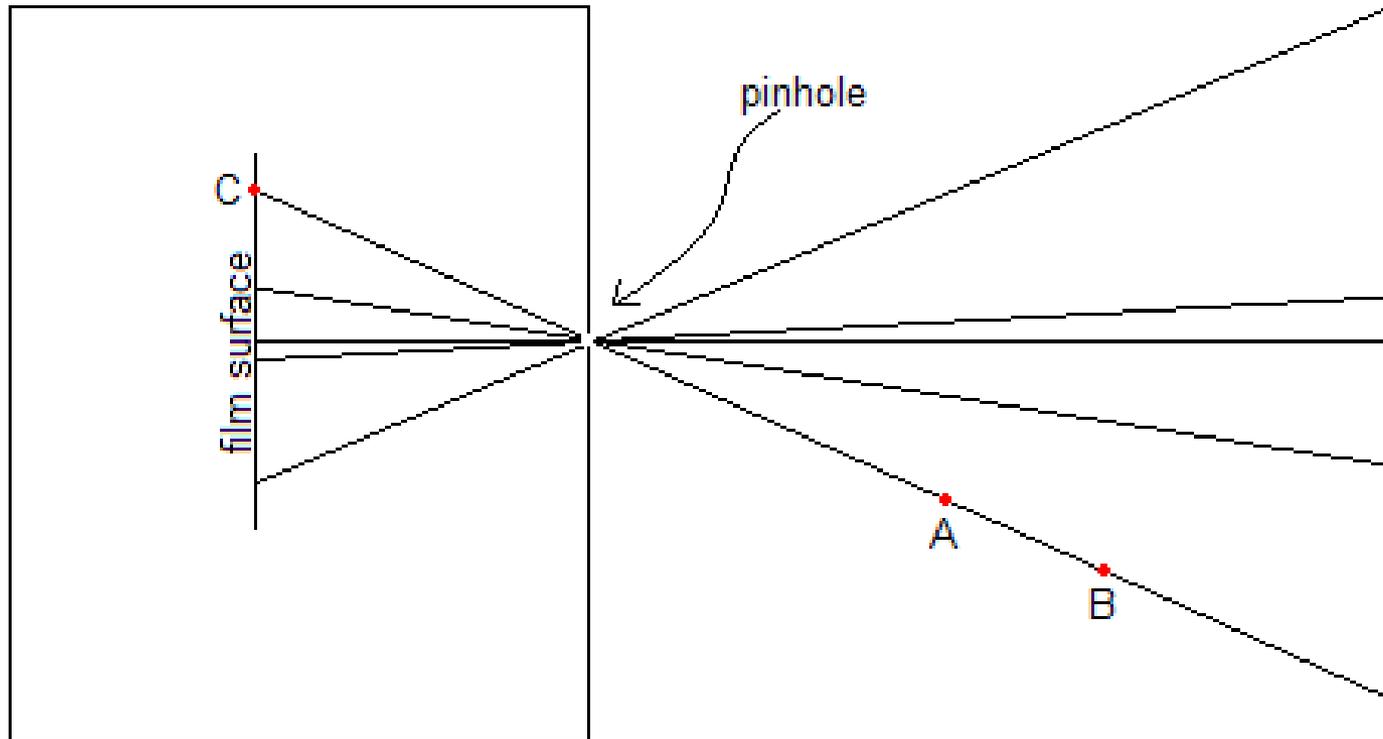
$$RP^2 = \{[x \quad y \quad 1] \cup [x \quad y \quad 0]\}$$

Pontos Ideais

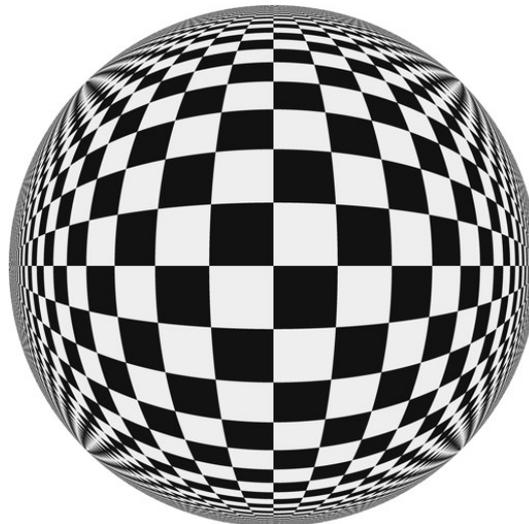
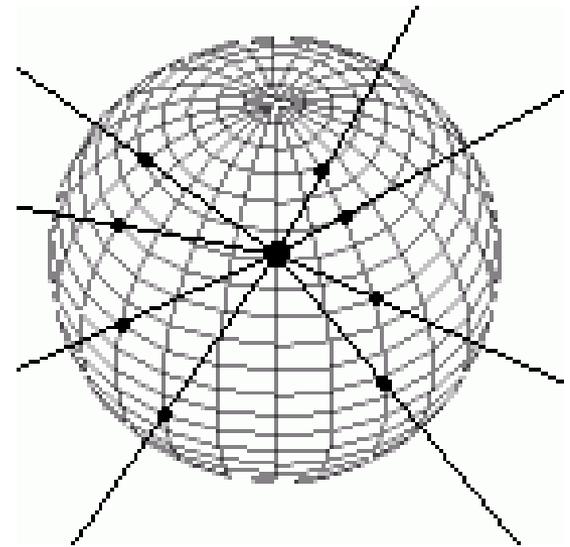
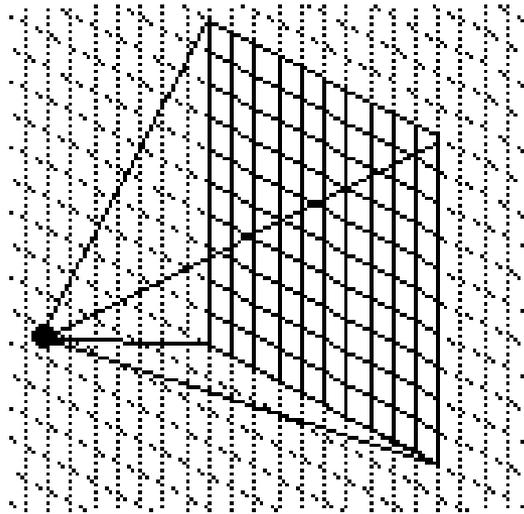
- Os pontos no plano $z = 0$ são chamados de pontos ideais, e correspondem à interseção de retas paralelas no plano afim.



Infinito e O Plano Projetivo



Onde Vão Os Pontos a 90°?



Xadrez infinitamente largo, refletido em um espelho esférico.

Transformações Projetivas

- Seja T é um operador linear invertível do R^3
 - ◆ T transforma retas em retas e deixa a origem fixa.
 - ◆ Define naturalmente um transformação no plano projetivo.
 - ◆ A transformação induzida T' é chamada transformação projetiva.

Matriz Projetiva

- A matriz 3×3 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim bidimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

Matriz de Translação

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + m \\ y + n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px + qy + 1 \end{pmatrix}$$

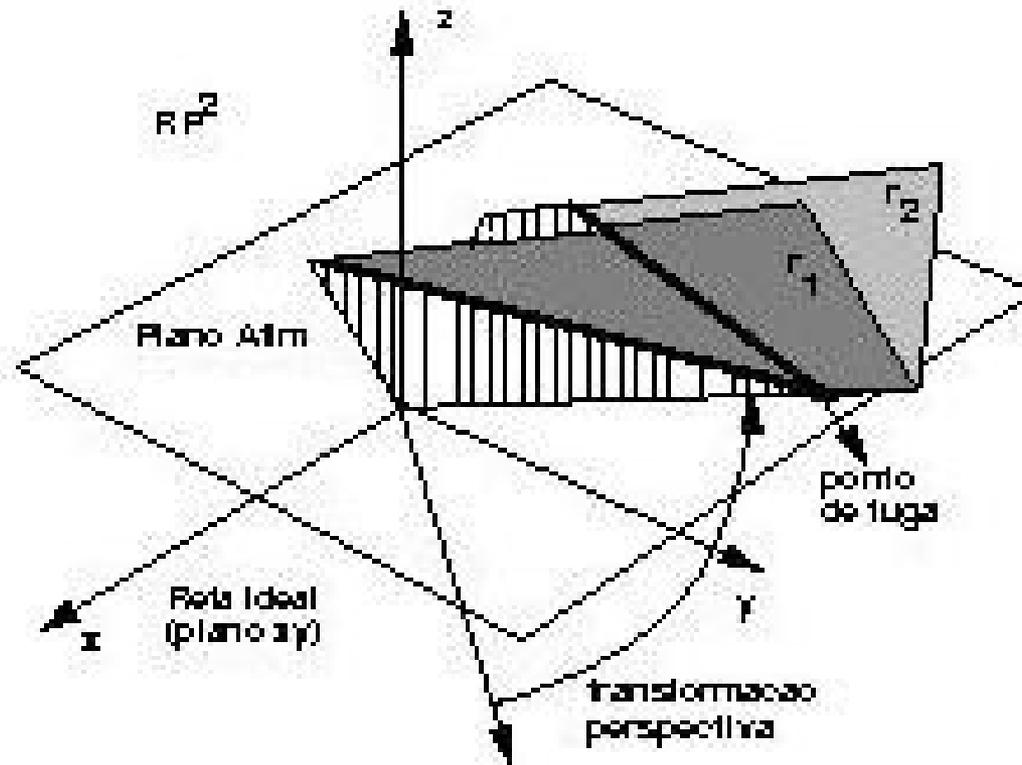
Efeito em Um Ponto Ideal

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px + qy \end{pmatrix}$$

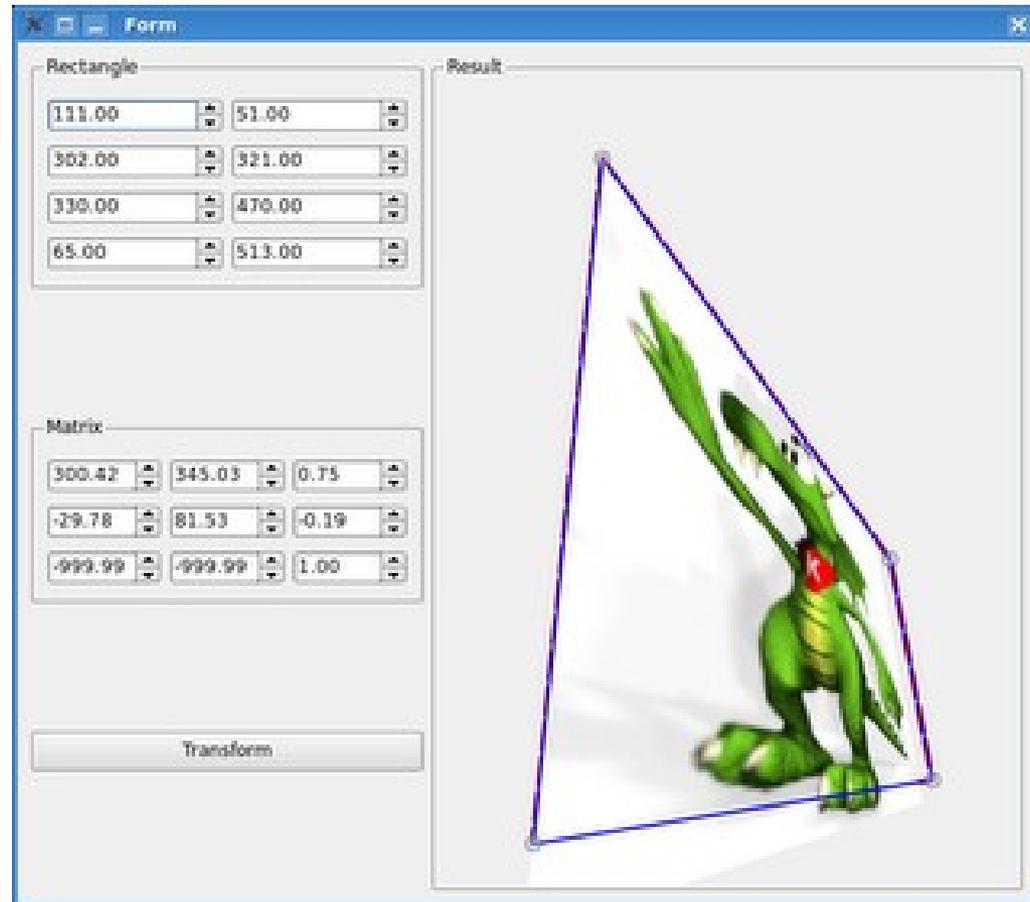
Pontos de Fuga

- Um ponto ideal pode ser levado em um ponto P_0 do plano afim.
- Família de retas paralelas que se intersectam no ponto ideal são transformadas numa família de retas incidentes em P_0 .
 - ◆ P_0 é chamado de ponto de fuga.
 - ◆ Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos coordenados.
 - Imagem de $[x,0,0]$ ou $[0,y,0]$.

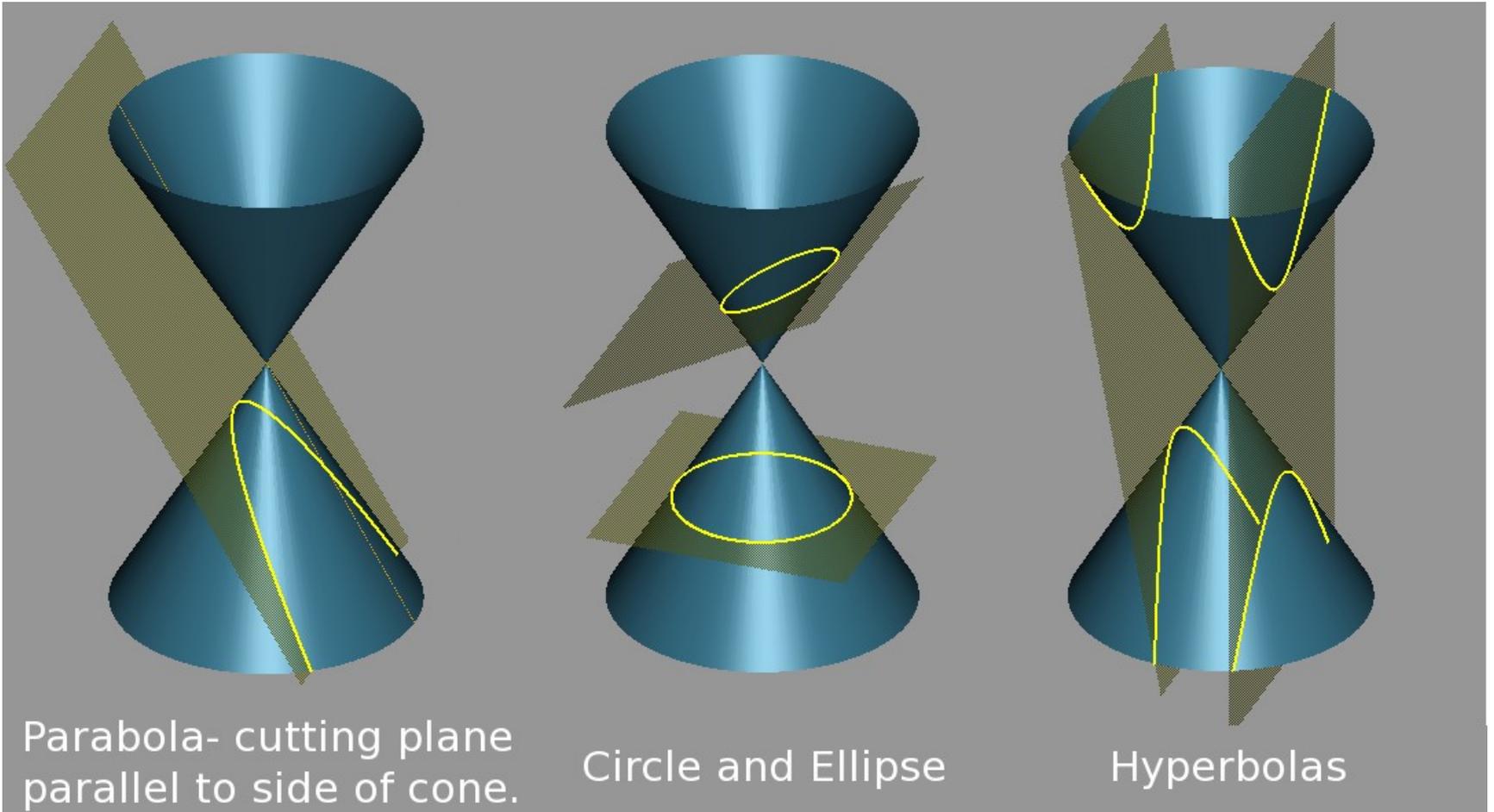
Ponto de Fuga



Transformação Perspectiva 2D



Cônicas



Círculo - Hipérbola

- Uma transformação projetiva mapeia uma cônica em uma outra cônica qualquer.
- A transformação abaixo, leva o círculo $x^2 + y^2 - w^2$ na hipérbola $w_1^2 - 4 x_1 y_1$

$$x = x_1 - y_1$$

$$y = w_1$$

$$w = x_1 + y_1$$

Espaço Projetivo

- O modelo analítico do espaço projetivo pode ser introduzido de forma análoga ao RP^2 .
- O espaço projetivo RP^3 é o conjunto das retas do R^4 que passam pela origem.
- Um ponto do espaço projetivo é definido como:

$$P = \{\lambda(x, y, z, w); \lambda \neq 0, (x, y, z, w) \neq (0,0,0,0)\}$$

- ◆ Denotado por $P = [x, y, z, w]$ em coordenadas homogêneas.

Ponto Projetivo

- Considerando o hiperplano $z = 1$ como o espaço afim Euclideano mergulhado em RP^3 :

$$P = [x, y, z, w] \in RP^3, w \neq 0 \Rightarrow P = [x/w \quad y/w \quad z/w \quad 1]$$

- Representa a interseção da reta $\lambda(x, y, z, w)$ com o hiperplano:

$$w = 1 \text{ ou } (\lambda = 1/w).$$

- Partição do espaço projetivo em dois conjuntos:

$$RP^3 = \{[x \quad y \quad z \quad 1] \cup [x \quad y \quad z \quad 0]\}$$

Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva T do RP^3 é uma transformação linear do R^4 .
- A matriz 4×4 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

- Ponto P do espaço afim é levado no hiperplano $w = rz + 1$
- Se $z = -1/r$, então P é levado em um ponto ideal.
- Pontos do espaço afim com $z = 0$ não são afetados.

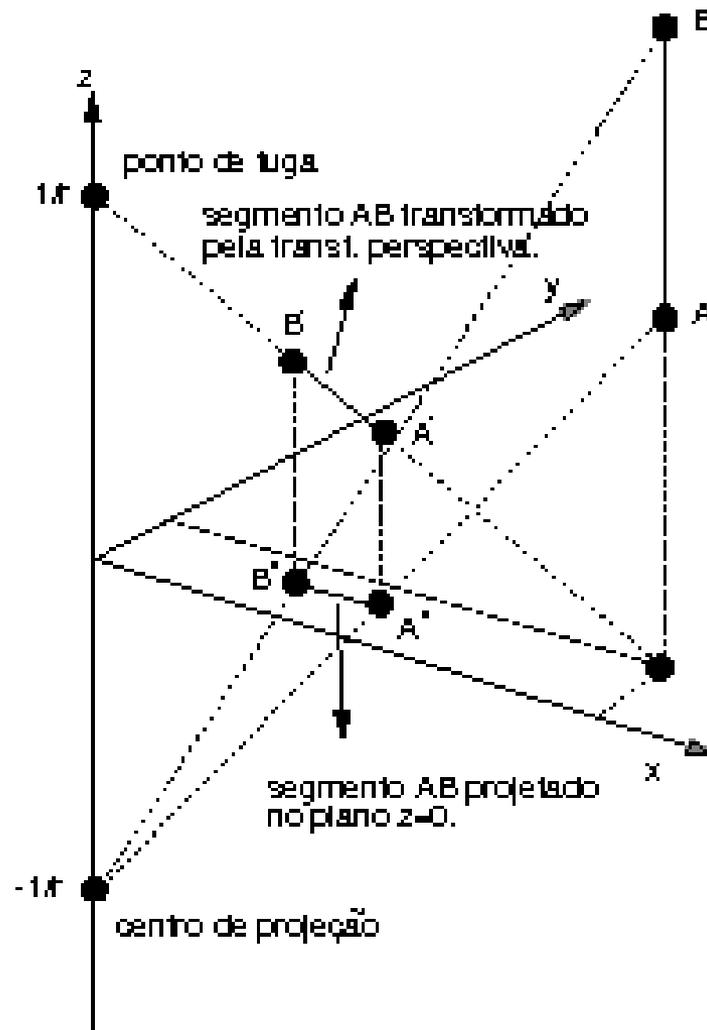
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz + 1 \end{pmatrix}$$

Ponto de Fuga Principal

- A imagem do ponto ideal, correspondendo a direção z , tem coordenadas $[0, 0, 1/r, 1]$
 - ♦ Este é o ponto de fuga principal da direção z .
 - ♦ Semi-espaço infinito $0 < z \leq \infty$ é transformado no semi-espaço finito $0 < z \leq 1/r$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

Interpretação



Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com 3 pontos de fuga, possui 3 centros de projeção:
 - ♦ $[-1/p, 0, 0, 1]$
 - ♦ $[0, -1/q, 0, 1]$
 - ♦ $[0, 0, -1/r, 1]$
- O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de 3 transformações perspectivas, com um único ponto de fuga em cada eixo.

Basta Implementar Transformações Com um Único Ponto de Fuga

- Transformações perspectivas com dois pontos de fuga equivalem a combinação de:
 - ◆ rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
 - ◆ transformação perspectiva com um único ponto de fuga.
- Com duas rotações, obtêm-se transformações com três pontos de fuga.

Efeito



Projeção Acarreta Perda de Informação

