Introdução à Computação Gráfica
Modelagem

Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Histórico

- Modelagem por arames (wireframes).
  - Representa os objetos por arestas e pontos sobre a sua superfície.
  - Gera modelos ambíguos.
- Modelagem por superfícies (década de 60).
  - Fornece a descrição matemática das superfícies que delimitam o objeto.
  - Poucos testes de integridade do modelo.

Histórico

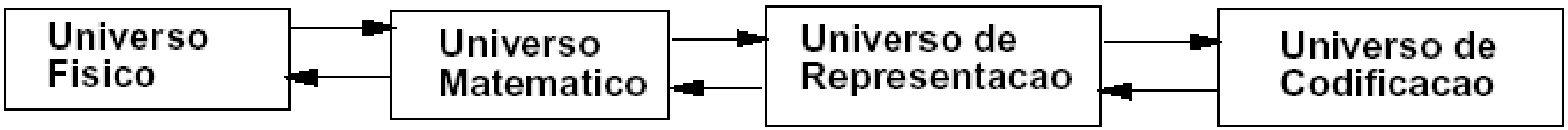
- Modelagem de Sólidos (década de 70).
  - Implícita ou explicitamente contém informações do fechamento e conectividade dos objetos.
  - Garante a realização física.
  - Sistemas CAD-CAM utilizados pela indústria.

Estado da Arte

- Modelagem de dimensão mista ou non-manifold (década de 80).
    - Permite representar objetos com estruturas internas ou com elementos pendentes de dimensão inferior.
    - Sólido delimitado por superfícies não necessariamente planas localmente.
    - Ex.: ACIS (Spatial Technology) – AutoCad.

Paradigmas de Abstração

- A necessidade de paradigmas (Ari Requicha).



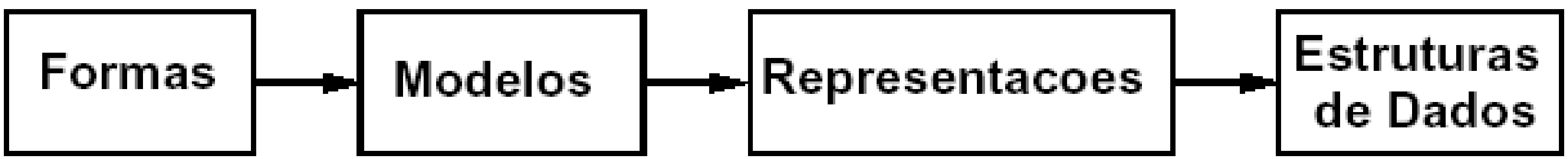
- Paradigma dos universos.
  - Físico *F*.
  - Matemático *M*.
  - Representação *R*.
  - Implementação *I*.

Problemas da Área

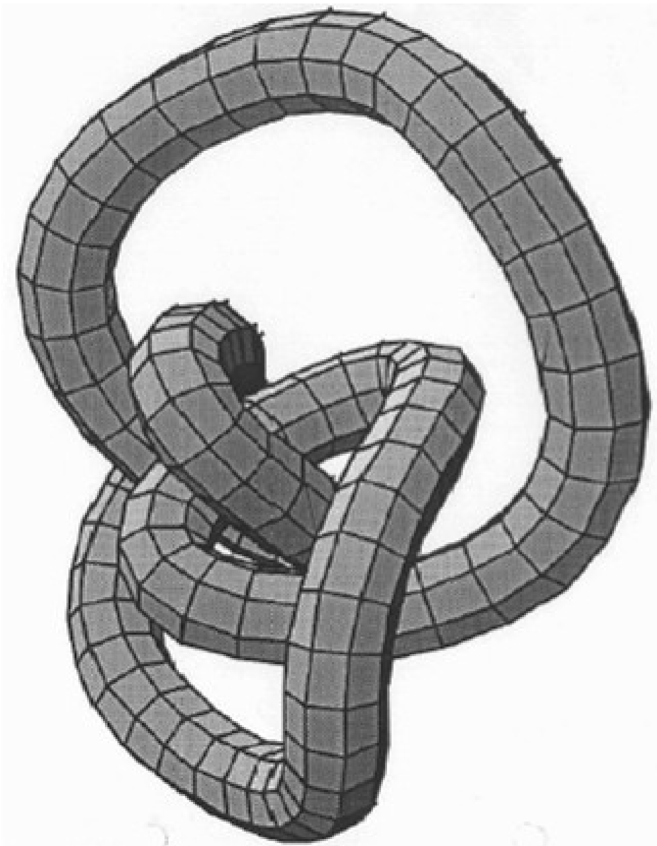
- Estudar fenômenos em F.
- Definir os modelos.
- Estudar as relações entre R e M.
- Definir representações de modelos em M.
- Estudar conversões entre representações.
- Definir métodos de implementação.
- Comparar estratégias em I.

Esquemas de Representação

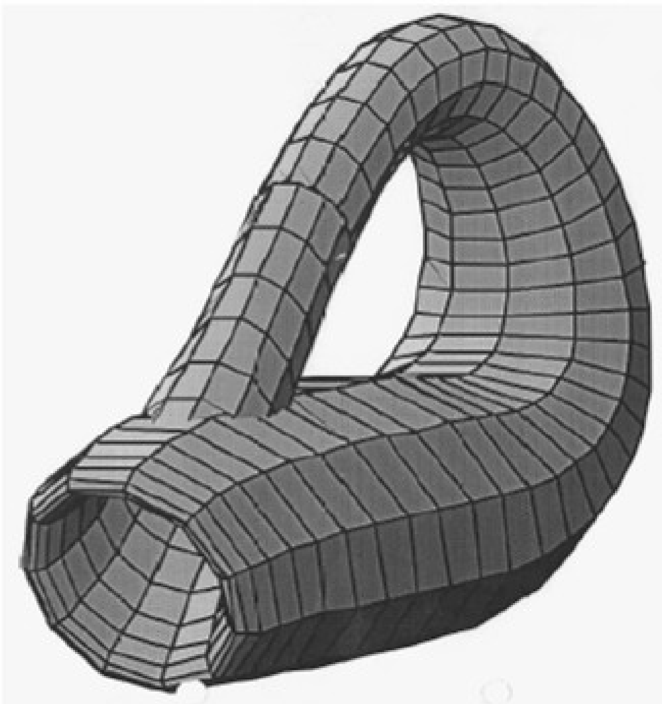
- Objetos do universo físico: “sólidos”
  - O que é um sólido?
- Objetos do universo matemático vêm da:
  - Geometria diferencial
  - Topologia diferencial



Geometria pode Ser Complicada

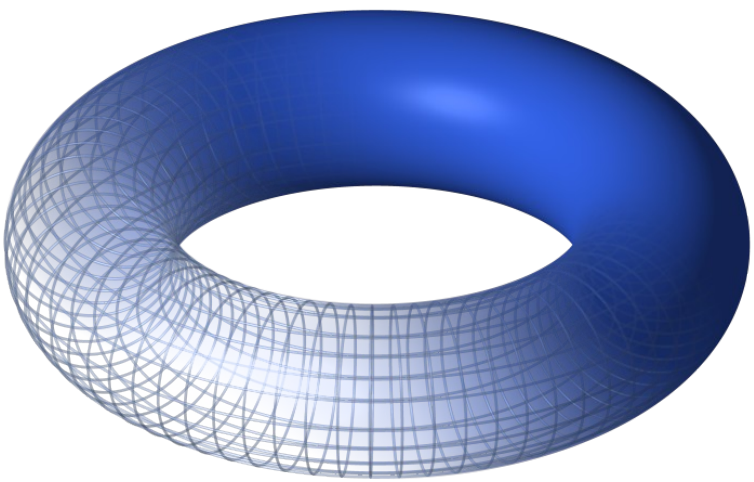


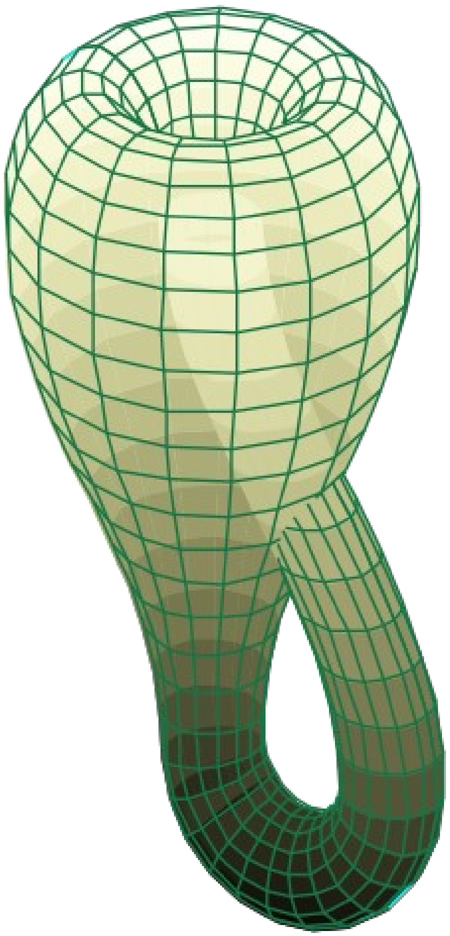
Nó



Garrafa de Klein
(não orientável)

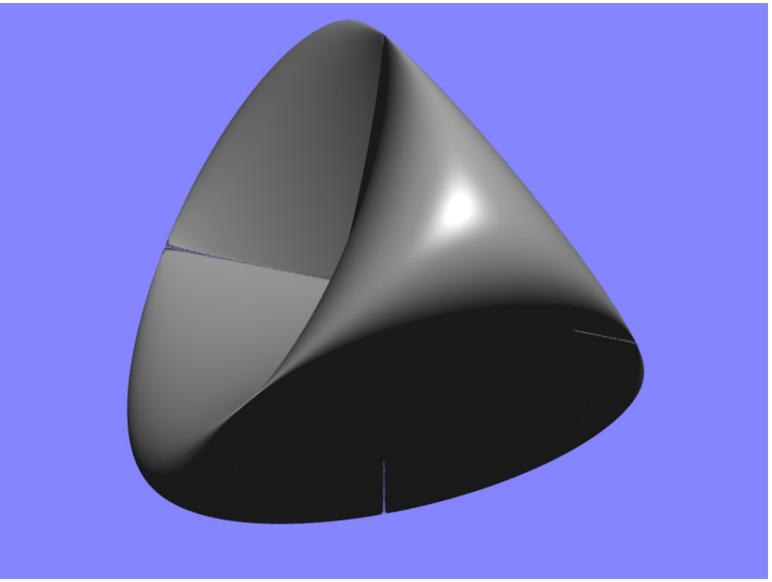
Toro x Garrafa de Klein



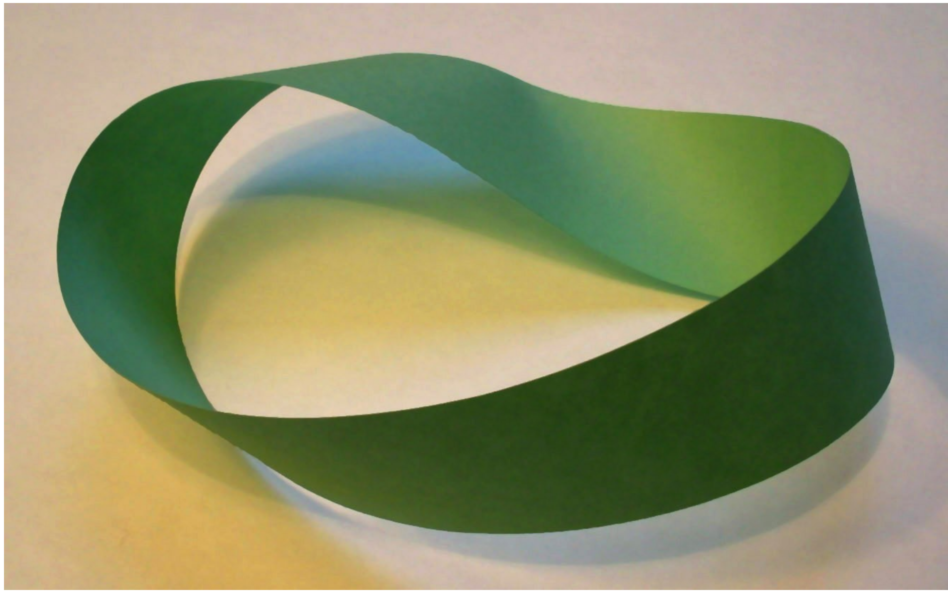


Superfícies Não Orientáveis

- Faixa de Möbius só tem um lado e uma borda.
- Superfície Romana é obtida costurando-se uma faixa de Möbius à borda de um disco (representação de RP^2 no R^3).



Superfície Romana



Faixa de Möbius

Descrição de Sólidos

- Assuma-se que um sólido é um conjunto tridimensional de pontos.
- Conjuntos de pontos podem ser descritos
  - Por suas fronteiras
  - Por campos escalares
    - Definidos por equações
    - Amostrados

Representação de Sólidos

- As duas formas, de descrever conjuntos de pontos, dão origem a três tipos de representação:
  - Por bordo (B-rep – Boundary Representation)
  - Implícita (CSG – Constructive Solid Geometry)
  - Por enumeração do espaço em células (BSP-trees, Octrees, etc.)

Representação por Bordo

- Sólido definido indiretamente através da superfície que o delimita.
  - compacta (fechada e limitada)
  - sem bordo
- Superfícies são descritas parametricamente por um mapeamento chamado de **parametrização**:

$$\varphi : U \subset \Re^2 \to \Re^3$$

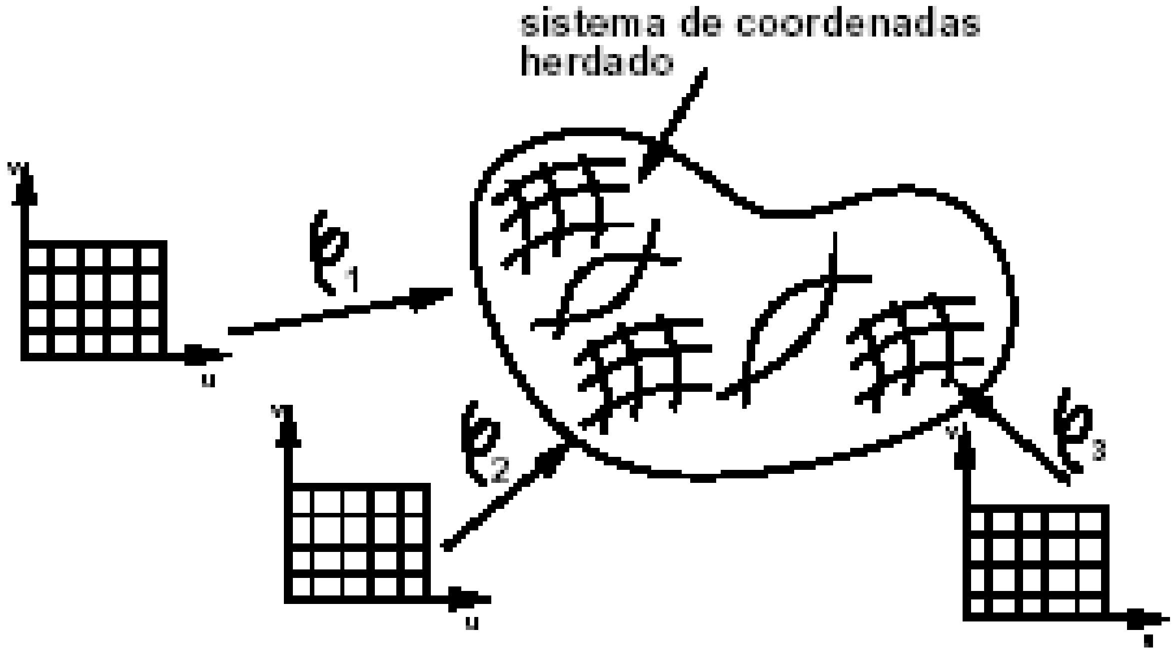
Parametrização

- Estabelece um sistema de coordenadas sobre a superfície <u>herdado</u> de um sistema de coordenadas no plano.

$$\varphi(u,v) = \left(\varphi_x(u,v), \varphi_y(u,v), \varphi_z(u,v)\right)^T = (x, y, z)^T$$

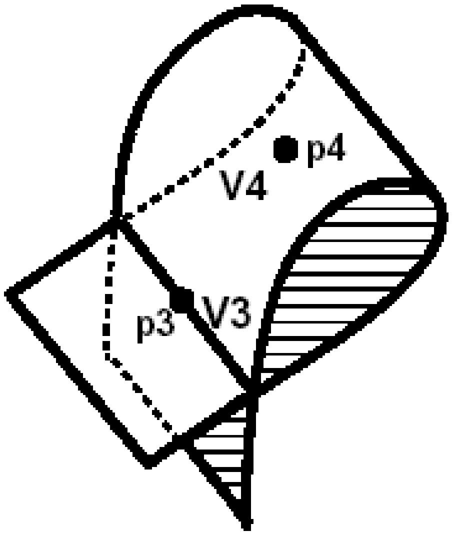
- Em geral, não é possível cobrir (descrever) toda a superfície com uma única parametrização.
  - Usam-se várias parametrizações que formam um **Atlas**.

Parametrização de uma Superfície



Parametrizações Válidas

- Sólido deve estar bem definido.
  - Superfície sem auto-interseção.
  - Vetor normal não se anula sobre a superfície.
  - Normal é usada para determinar o interior e o exterior do sólido.



$$N = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)$$

Exemplo

- Parametrização da esfera de raio 1, centrada na origem.

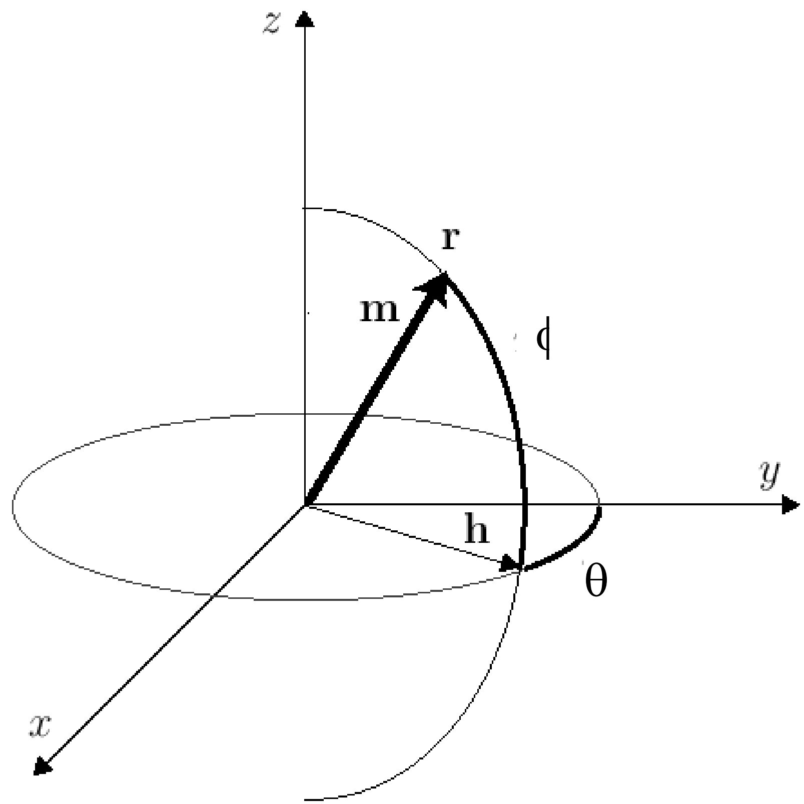
$$f(\theta,\phi)=\begin{bmatrix}\cos(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\phi)\end{bmatrix}$$

$$N=\frac{\partial f}{\partial\theta}\times\frac{\partial f}{\partial\phi}=\begin{bmatrix}-\sin(\theta)\sin(\phi)\\ \cos(\theta)\sin(\phi)\\ 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \sin(\theta)\cos(\phi)\\ -\sin(\phi)\end{bmatrix}$$

- Se $\Phi = \pi$ ou $\Phi = 0$ a normal não está definida nos pólos por esta parametrização.

Domínio do Exemplo Anterior

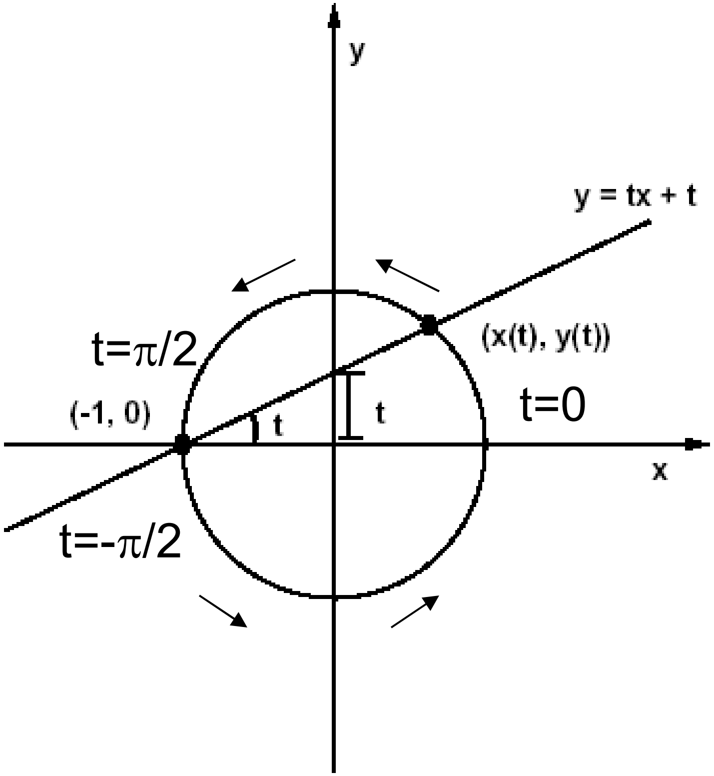
- Toda parametrização da esfera deixa pelo menos um ponto de fora.
- É impossível mapear continuamente a esfera no plano sem retirar pelo menos um ponto.



$$U = \left\{(\theta, \phi) \in \Re^2 ; 0 < \phi < \pi ; 0 \leq \theta < 2\pi\right\}$$

Parametrização do Círculo

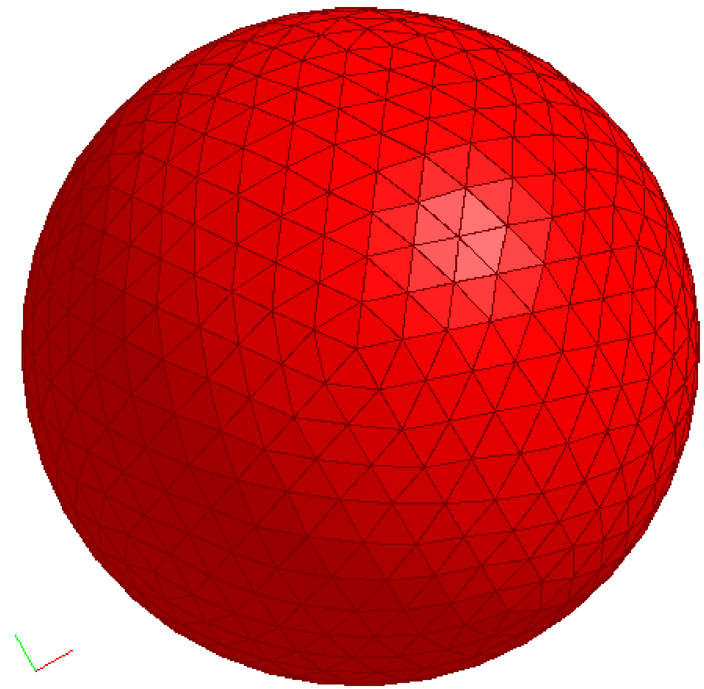
- Forma implícita
  - $y = tx + t$
  - $x^2 + y^2 = 1$
- Resolvendo esse sistema chega-se a uma parametrização alternativa do círculo.



$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}; y(t) = \frac{2t}{1+t^2}; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Representação Linear por Partes

- Superfície parametrizada com geometria complexa pode ser aproximada por uma superfície linear por partes.
- Pode-se particionar o domínio da parametrização por um conjunto de polígonos.
  - Cada vértice no domínio poligonal é levado para a superfície pela parametrização.
  - Em seguida é ligado aos vértices adjacentes mantendo as conectividades do domínio.



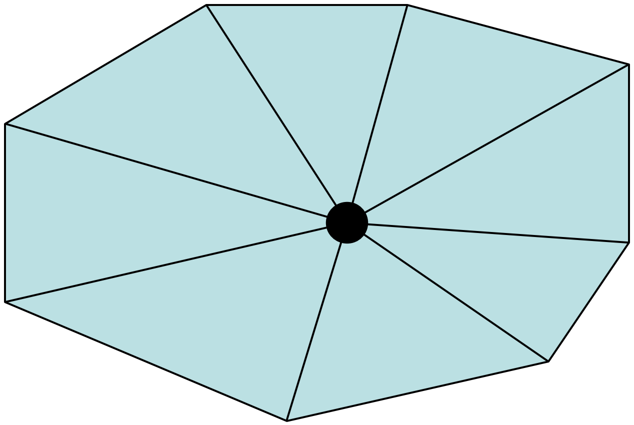
Propriedades

- Gera uma malha poligonal, definida por um conjunto de vértices, arestas e faces.
  - Cada aresta é compartilhada por no máximo duas faces.
  - A interseção de duas faces é uma aresta, um vértice ou vazia.
- Adjacência de vértices, arestas e faces é chamada de **topologia** da superfície.

Decomposição Poligonal

Operações sobre Malhas Poligonais

- Achar todas as arestas que incidem em um vértice.
- Achar as faces que incidem numa aresta ou vértice.
- Achar as arestas na fronteira de uma face.
- Desenhar a malha.



Codificação

- Explícita.
- Ponteiros para lista de vértices.
- Ponteiros para lista de arestas.
- Winged-Edge (Half-Edge, Face-Edge).
- Quad-Edge (Guibas-Stolfi).
- Radial-Edge.

Codificação Explícita

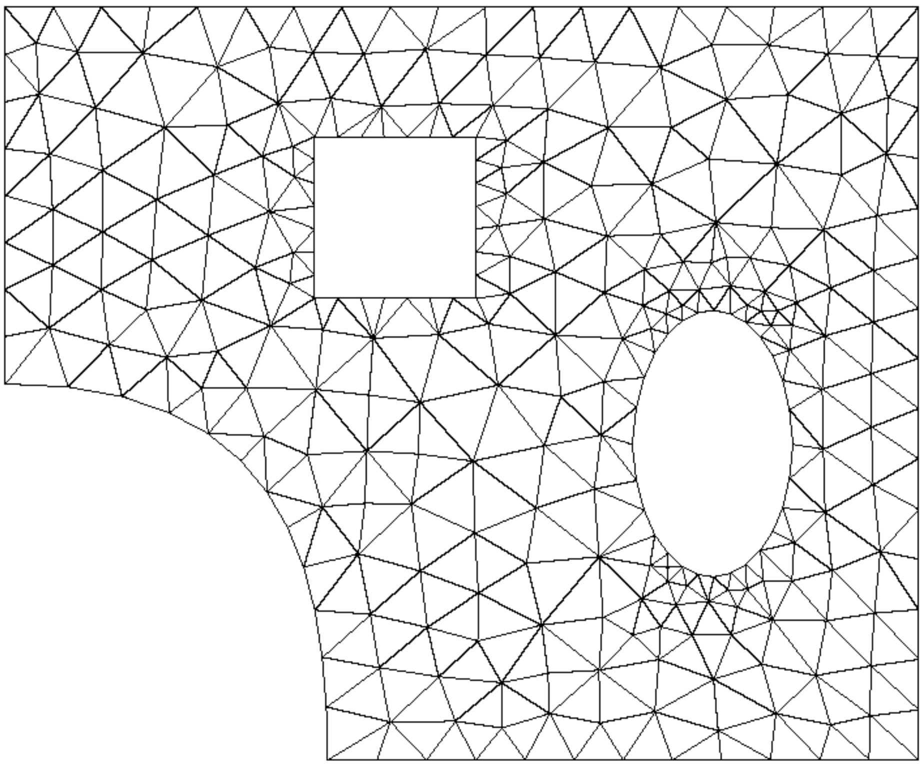
- A mais <u>simples</u>.
- Cada face armazena explicitamente a lista ordenada das coordenadas dos seus vértices:

$$P = \left\{ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_n, y_n, z_n) \right\}$$

- Muita <u>redundância</u> de informação.
- Consultas são complicadas.
  - Obriga a execução de algoritmos geométricos para determinar adjacências.

Desenho da Malha

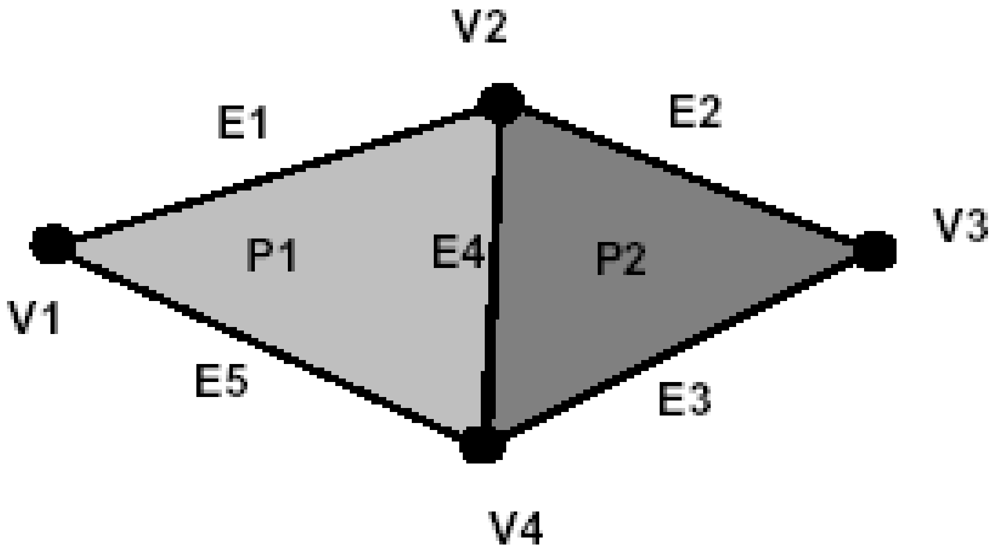
- Cada aresta é desenhada duas vezes, pelos duas faces que a compartilham.
- Não é bom para plotadoras ou filmes.



Ponteiros para Lista de Vértices

- Vértices são armazenados separadamente.
- Há uma lista de vértices.
- Faces referenciam seus vértices através de ponteiros.
- Proporciona maior economia de memória.
- Achar adjacências ainda é complicado.
- Arestas ainda são desenhadas duas vezes.

Exemplo



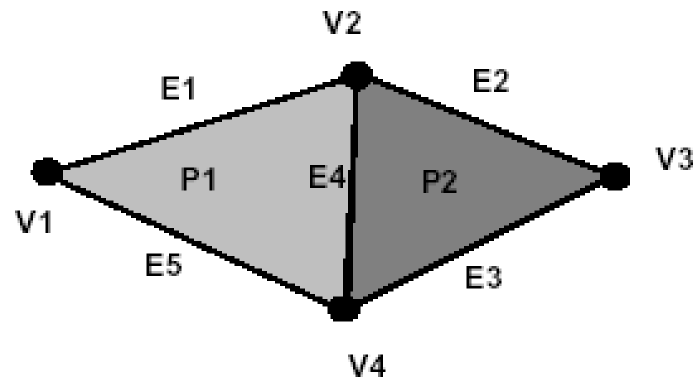
- $V = \{V_1 = (x_1, y_1, z_1), V_2 = (x_2, y_2, z_2), V_3 = (x_3, y_3, z_3), V_4 = (x_4, y_4, z_4)\}$;
- $P_1 = \{V_1, V_2, V_4\}$;
- $P_2 = \{V_4, V_2, V_3\}$.

Ponteiros para Lista de Arestas

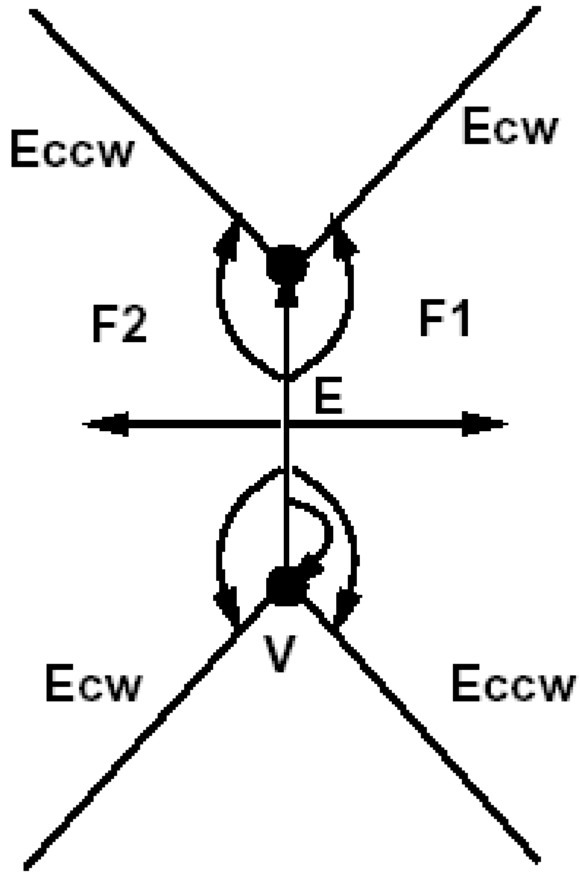
- Há também uma lista de arestas.
- Faces referenciam as suas arestas através de ponteiros.
- Arestas são desenhadas percorrendo-se a lista de arestas.
- Introduzem-se referências para as duas faces que compartilham uma aresta.
  - Facilita a determinação das duas faces incidentes na aresta.

Exemplo

- $V = \{V_1 = (x_1, y_1, z_1), V_2 = (x_2, y_2, z_2), V_3 = (x_3, y_3, z_3), V_4 = (x_4, y_4, z_4)\}$;
- $E_1 = \{V_1, V_2, P_1, \lambda\}$;
- $E_2 = \{V_2, V_3, P_2, \lambda\}$;
- $E_3 = \{V_3, V_4, P_2, \lambda\}$;
- $E_4 = \{V_2, V_4, P_1, P_2\}$;
- $E_5 = \{V_4, V_1, P_1, \lambda\}$;
- $P_1 = \{E_1, E_4, E_5\}$;
- $P_2 = \{E_2, E_3, E_4\}$.



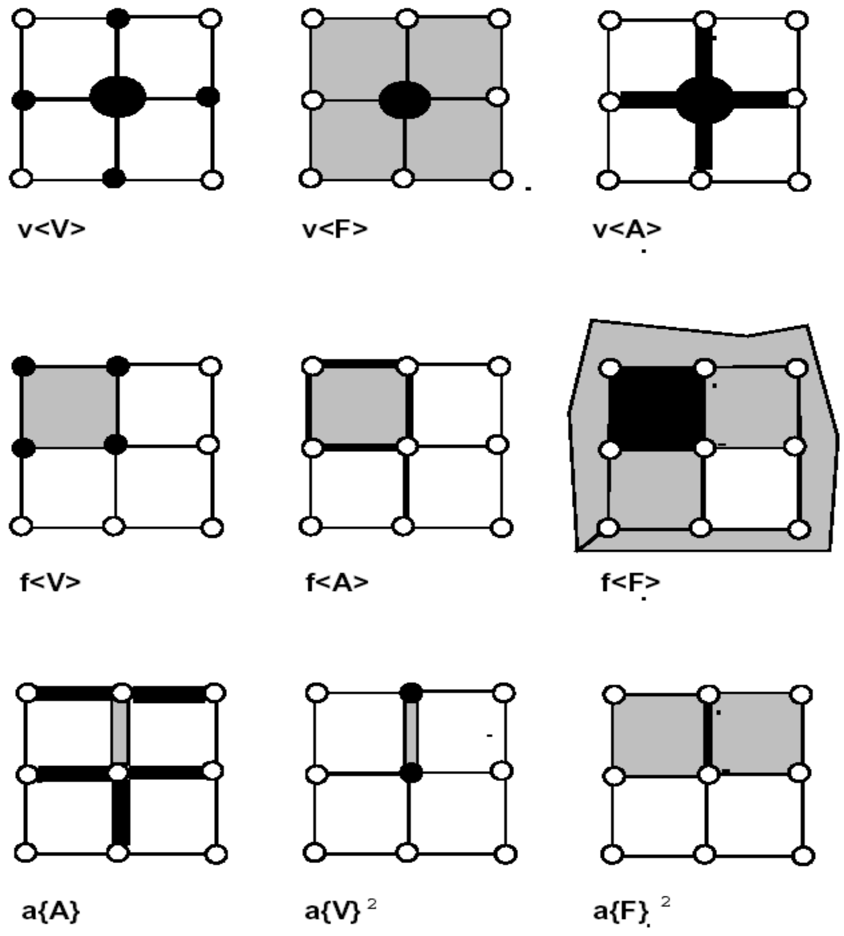
Winged-Edge



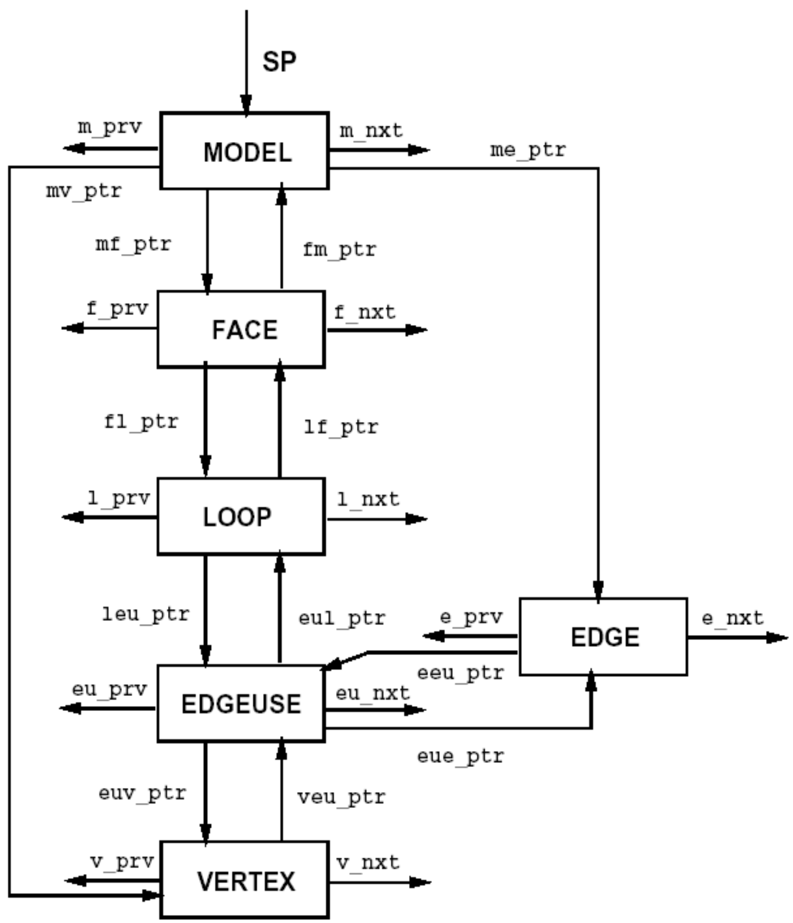
Winged-Edge

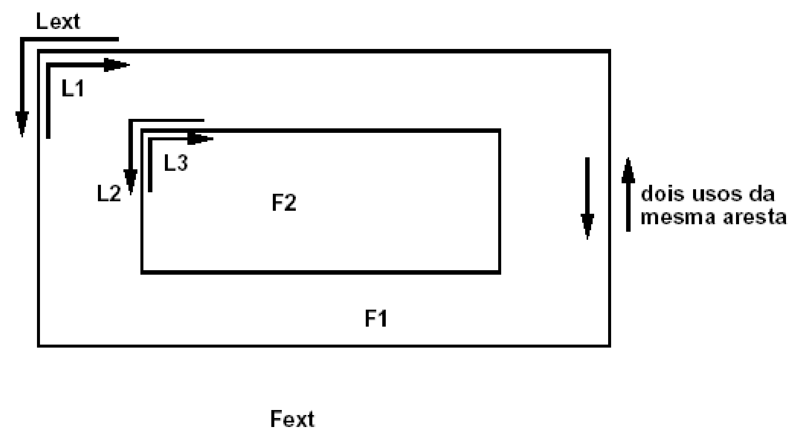
- Criada em 1974 por Baumgart.
- Foi um marco na representação por fronteira.
- Armazena informação na estrutura associada às arestas (número de campos é fixo).
- Todos os 9 tipos de adjacência entre vértices, arestas e faces são determinados em tempo constante.
- Atualizada com o uso de operadores de Euler, que garantem: $V - A + F = 2$.

9 tipos de Relacionamentos de Adjacência



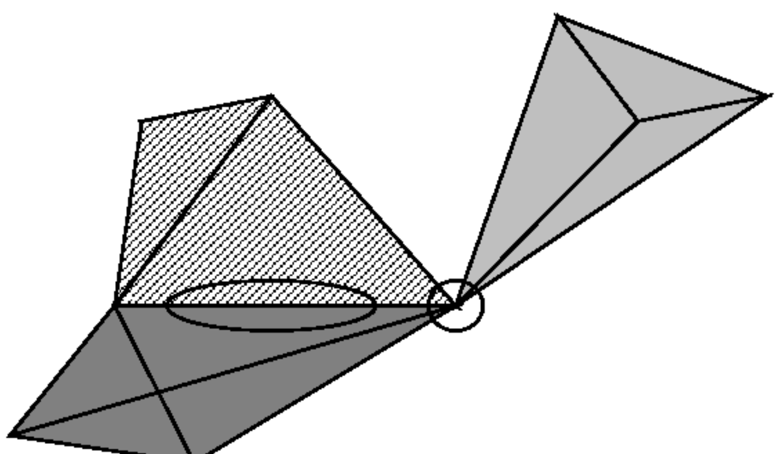
Face-Edge


SP
m_prv
MODEL
m_nxt
me_ptr
mv_ptr
mf_ptr
fm_ptr
f_prv
FACE
f_nxt
fl_ptr
lf_ptr
l_prv
LOOP
l_nxt
leu_ptr
eul_ptr
e_prv
EDGE
e_nxt
eeu_ptr
eu_prv
EDGEUSE
eu_nxt
eue_ptr
euv_ptr
veu_ptr
v_prv
VERTEX
v_nxt

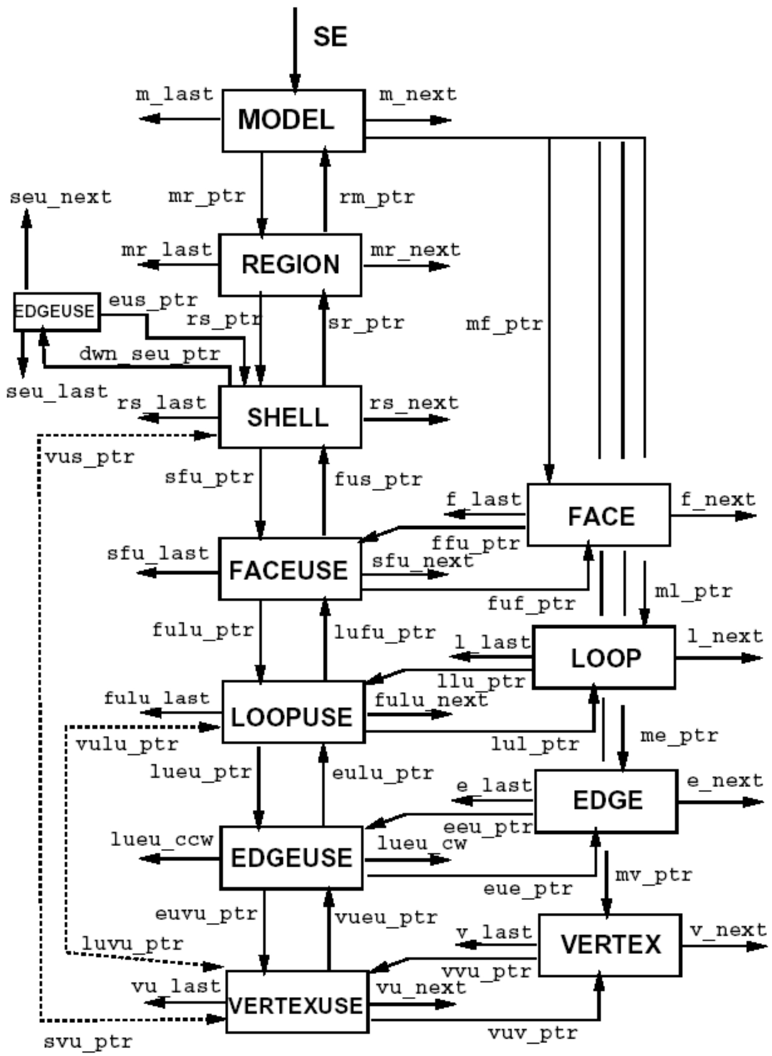

Lext
L1
L3
L2
F2
dois usos da
mesma aresta
F1
Fext

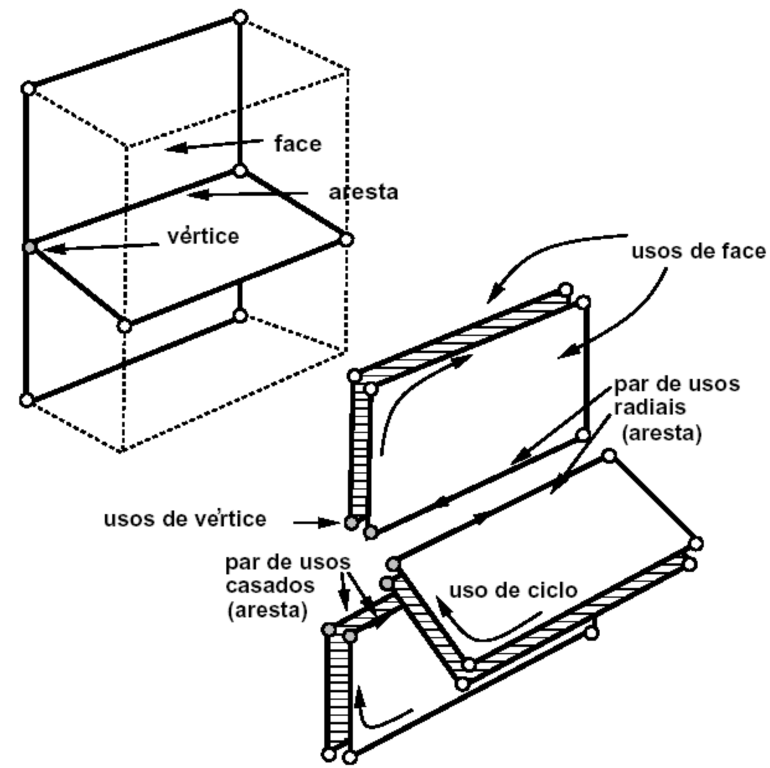
Radial-Edge

- Criada em 1986 por Weiler.
- Representa objetos non-manifold (não variedades).
- Armazena a lista ordenada de faces incidentes em uma aresta.
- Muito mais complicada que a Winged-Edge.



Radial-Edge


SE
MODEL
m_last
m_next
mr_ptr
rm_ptr
REGION
mr_last
mr_next
seu_next
EDGEUSE
eus_ptr
rs_ptr
sr_ptr
mf_ptr
dwn_seu_ptr
seu_last
SHELL
rs_last
rs_next
vus_ptr
sfu_ptr
fus_ptr
FACE
f_last
f_next
ffu_ptr
FACEUSE
sfu_last
sfu_next
fuf_ptr
ml_ptr
fulu_ptr
lufu_ptr
LOOP
l_last
l_next
llu_ptr
LOOPUSE
fulu_last
fulu_next
vulu_ptr
lul_ptr
me_ptr
lueu_ptr
eulu_ptr
EDGE
e_last
e_next
eeu_ptr
EDGEUSE
lueu_ccw
lueu_cw
eue_ptr
mv_ptr
euvu_ptr
vueu_ptr
VERTEX
v_last
v_next
luvu_ptr
vvu_ptr
VERTEXUSE
vu_last
vu_next
svu_ptr
vuv_ptr


face
aresta
vértice
usos de face
par de usos radiais (aresta)
usos de vértice
par de usos casados (aresta)
uso de ciclo

Representação Implícita

- Sólido é definido por um conjunto de valores que caracterizam seus pontos.
- Descreve a superfície dos objetos, implicitamente, por uma equação:

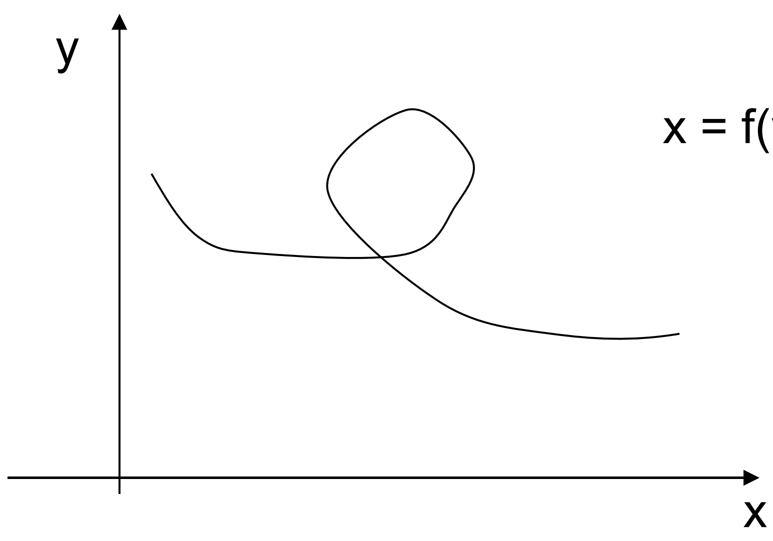
$$F(x) = c; X \in \Re^n, c \in \Re.$$

$$F : \Re^n \rightarrow \Re \text{ de classe } C^k.$$

- F é chamada de função implícita.

Funções Implícitas

- Uma superfície definida de forma implícita pode apresentar <u>auto-interseção</u>.
- Pergunta: $F(x,y,z)$ define implicitamente $z = f(x,y)$ em algum domínio razoável?



x = f(y) ou y = f(x) ?

Teorema da Função Implícita

- Seja $F : \Re^n \to \Re$ definida num conjunto aberto U.
- Se F possui derivadas parciais contínuas em U e $\nabla F \neq 0$ em U, então F é uma <u>subvariedade</u> de dimensão n - 1 do $\Re^n$.
  - Superfície sem auto-interseção.

Valores Regulares

- Um valor c é dito **regular** se $F^{-1}(c)$ não contém pontos onde $\nabla F = 0$ (pontos singulares).

$$\forall p \in F^{-1}(c) \Rightarrow \nabla F_p = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) \Big|_p \neq 0.$$

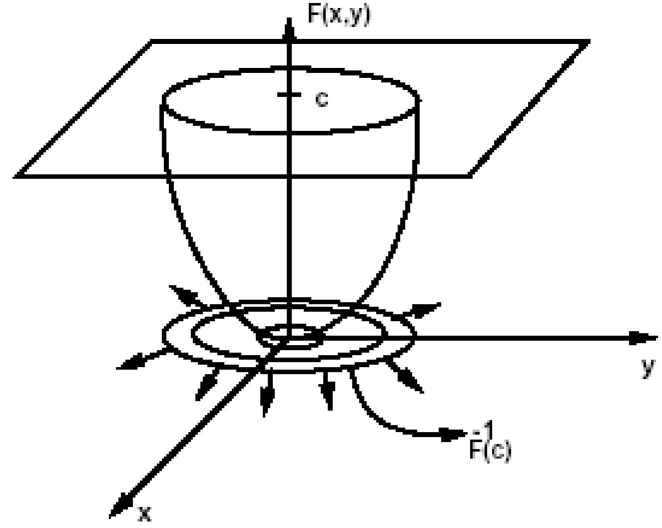
- Neste curso interessam apenas os casos em que $n = 2$ ou 3 (curvas e superfícies implícitas).

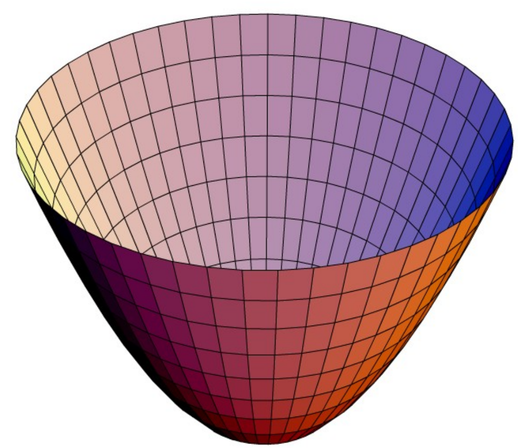
Exemplo 1

- Seja $F(x,y) = x^2 + y^2$ que define um parabolóide no $\Re^3$.
- Curvas de nível são círculos.

∀ $\nabla F = (2x, 2y)$ se anula na origem.

- 0 não é valor regular de F. Logo $F(x,y) = 0$ não define uma função implícita.





Exemplo 2

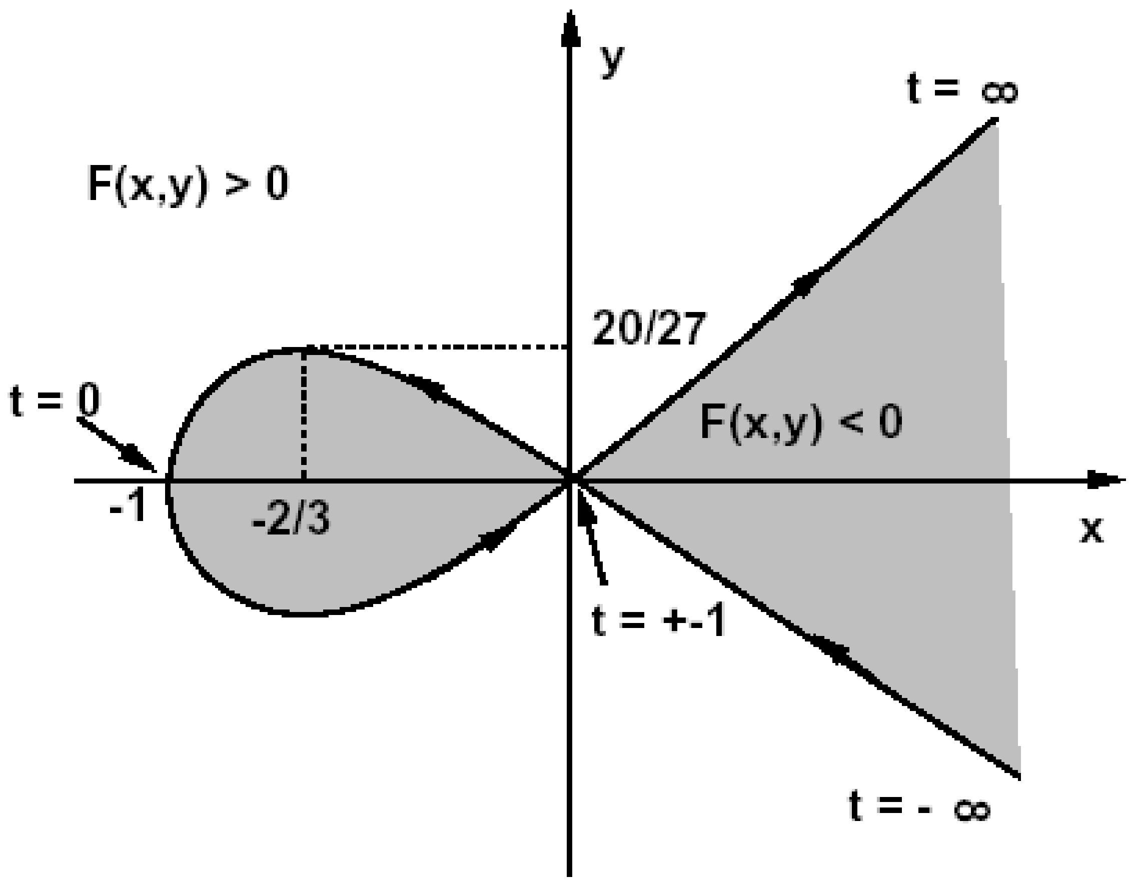
- Cascas esféricas: $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.
- Para todo $k > 0$, $F^{-1}(k)$ representa a superfície de uma esfera no $\Re^3$.
- 0 não é valor regular de F.
  - $F^{-1}(0) = (0,0,0)$ e $\nabla F=(2x, 2y, 2z)$ se anula na origem.

Exemplo 3

- $F(x,y) = y^2 - x^2 - x^3$, $\nabla F = (2y, -3x^2 - 2x)$.
- Na forma paramétrica:
  - $x(t) = t^2 - 1$ e $y(t) = t\,(t^2 - 1)$.
- Curva de nível 0 é um laço, com uma singularidade na origem:

$$z = F(x,y) = y^2 - x^2 - x^3 = 0$$

Gráfico do Exemplo 3



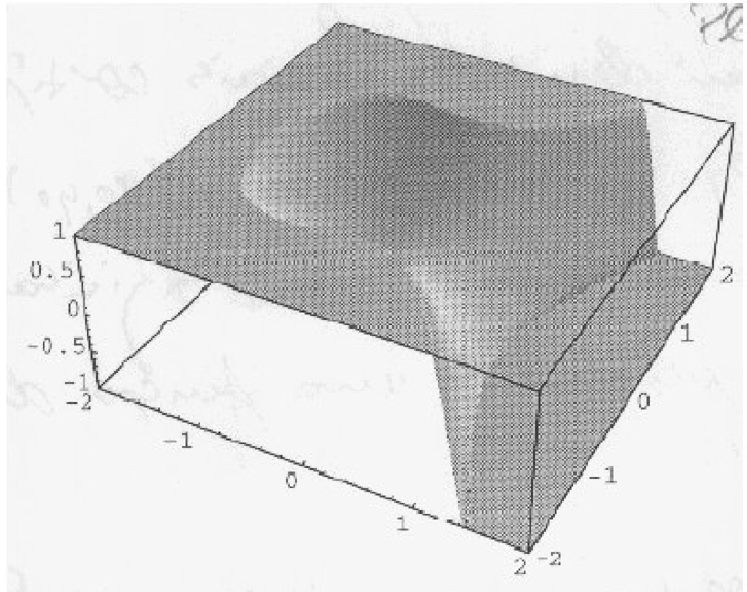
Observação

- Olhando F(x,y) como superfície de nível 0 da função $H : \Re^3 \rightarrow \Re$,

  $H(x,y,z) = -z + y^2 - x^2 - x^3$,

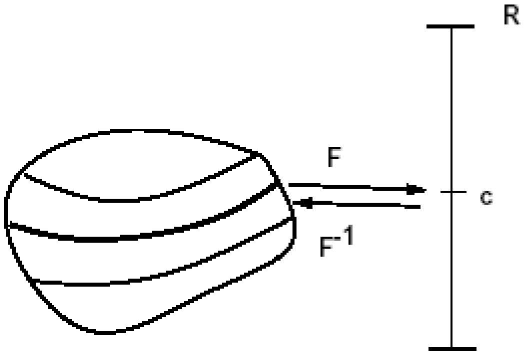
  $\nabla H = (-3\,x^2 - 2x, 2y, -1)$;

  $\nabla H(0,0,0) = (0,0,-1)$.
- Todos os pontos são regulares.
- Gráfico de F no $\Re^3$ é realmente o gráfico de uma função!



Objeto Implícito

- Um subconjunto $O \subset \Re^n$ é chamado de **objeto implícito** se existe $F : U \rightarrow \Re$, $O \subset U$, e existe um subconjunto $V \subset \Re$ / $O = F^{-1}(V)$ ou $O = \{p \in U, F(p) \in V\}$.
- Um objeto implícito é dito **regular** se F satisfaz a condição de regularidade.
- Um objeto implícito é <u>válido</u> se define uma superfície no $\Re^n$.

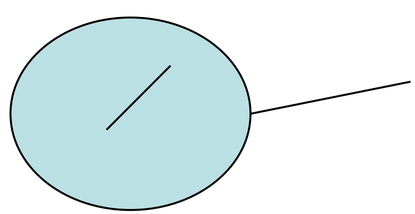


Interior x Exterior

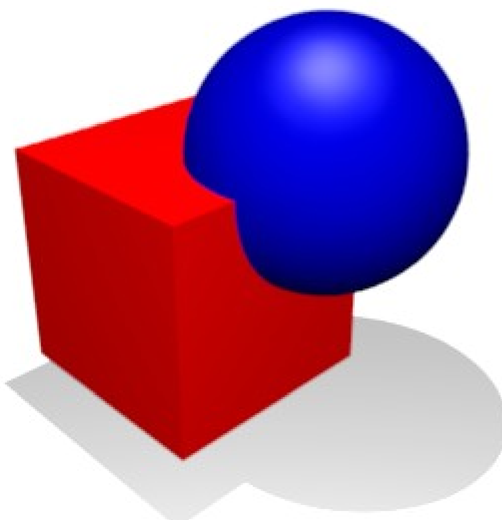
- A função F faz a classificação dos pontos do espaço.
- Permite decidir se o ponto está no interior, na fronteira ou no exterior.
  - $F > 0 \Rightarrow p \in$ exterior de O.
  - $F = 0 \Rightarrow p \in$ fronteira de O.
  - $F < 0 \Rightarrow p \in$ interior de O.

Esquema de Representação CSG

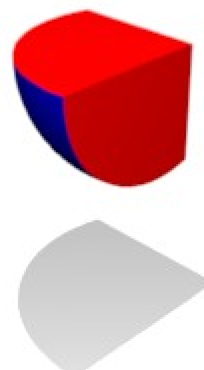
- Operações CSG definem objetos através de operações **regularizadas** de conjuntos de pontos.
  - União, Interseção e Diferença.
- Um objeto é **regular** se o <u>fecho</u> do <u>interior</u> do seu conjunto de pontos é igual ao próprio conjunto de pontos.



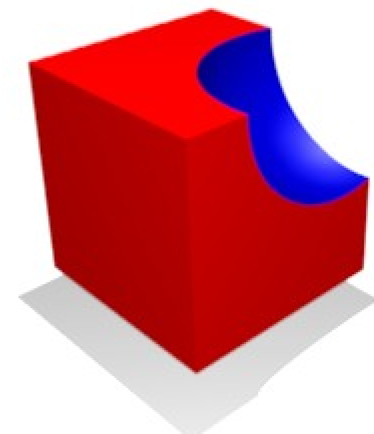
Operações Booleanas



União



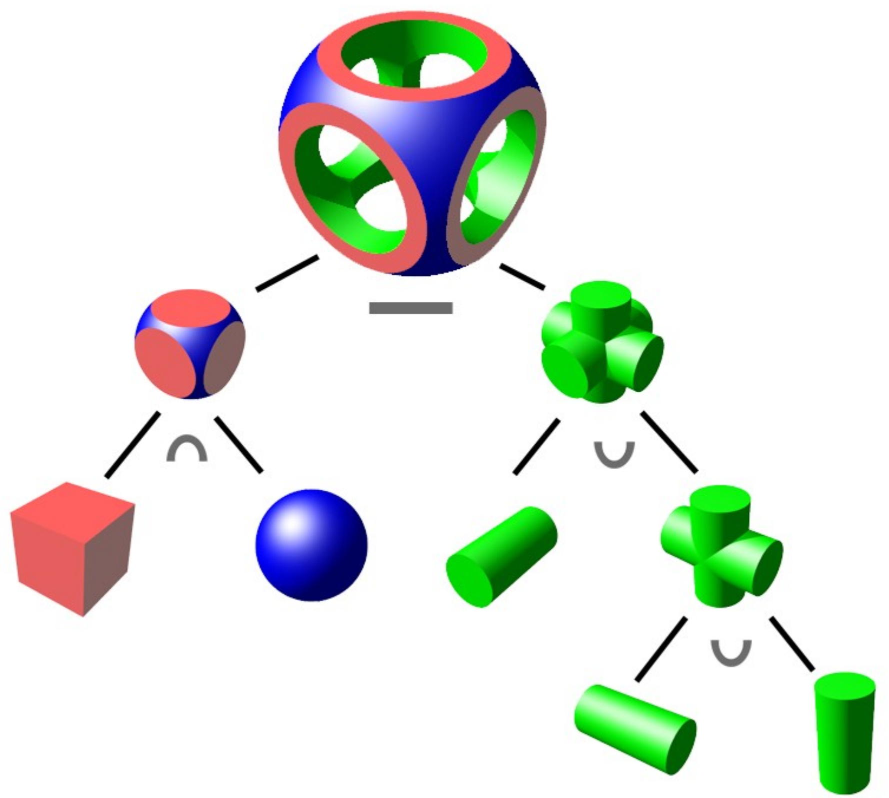
Interseção



Diferença

Árvore CSG

- Um modelo CSG é codificado por uma <u>árvore</u>.
  - Os nós internos contêm operações de conjunto ou transformações lineares afim.
  - Folhas contêm objetos primitivos (tipicamente, quádricas).



CSG com Objetos Implícitos

- Primitivas CSG são definidas por $F_i(X) \leq 0$.
- Operações *booleanas* são definidas nesse caso por:
  - $F_1 \cup F_2$ = min (F_1, F_2).
  - $F_1 \cap F_2$ = max (F_1, F_2).
  - $F_1 \,/\, F_2 = F_1 \cap F_2$ = max $(F_1, -F_2)$.

Prós e Contras de Representações

- Representações por fronteira e por campos escalares apresentam vantagens e desvantagens.
- Numa B-rep as interseções estão representadas <u>explicitamente</u> e é mais fácil exibir um ponto sobre a superfície do objeto.
- Porém é difícil determinar, dado um ponto, se ele está no interior, fronteira ou exterior do objeto.
- Operações *booleanas* são complicadas.

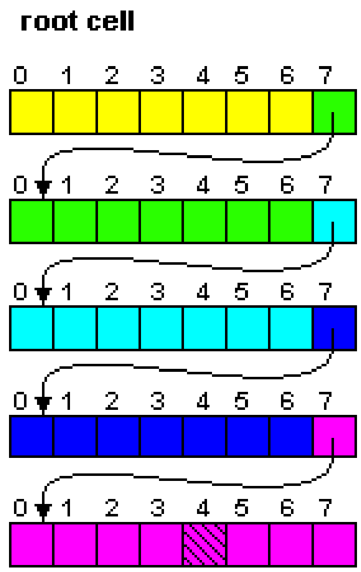
Representações por Campos Escalares

- Em tais representações a classificação de um ponto é imediata, bastando avaliar o sinal do valor do campo no ponto.
- Exibir um ponto sobre a superfície do objeto requer a solução de uma equação, que pode ser complicada.
- Operações *booleanas* são avaliadas facilmente.

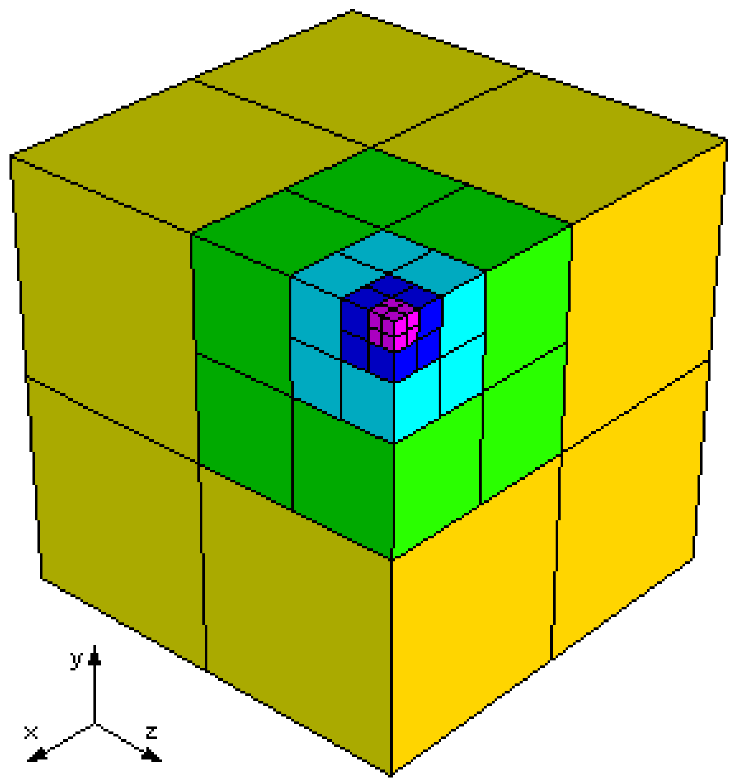
Representações por Células

- Dividem o espaço em sub-regiões convexas.
  - Grades: Cubos de tamanho igual
  - Octrees: Cubos cujos lados são potências de 2
  - BSP-trees: Poliedros convexos
- Às células são atribuídas valores de um campo escalar $F(x, y, z)$.
  - Campo é assumido constante dentro de cada célula.
- Sólido é definido como o conjunto de pontos tais que $A < F(x, y, z) < B$ para valores A e B estipulados.

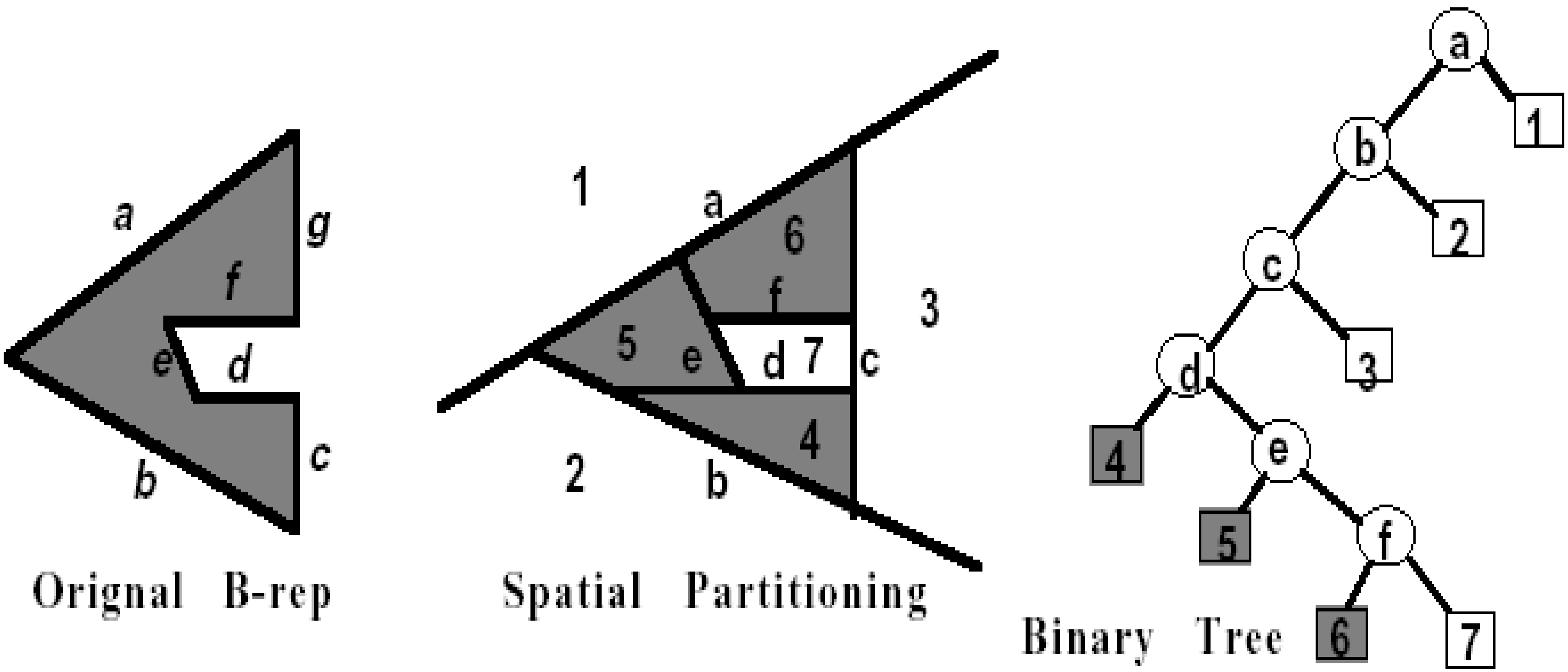
Octrees



		0	1	2	3	4
Z	31	1	1	1	1	1
Y	30	1	1	1	1	0
X	30	1	1	1	1	0
		7	7	7	7	4



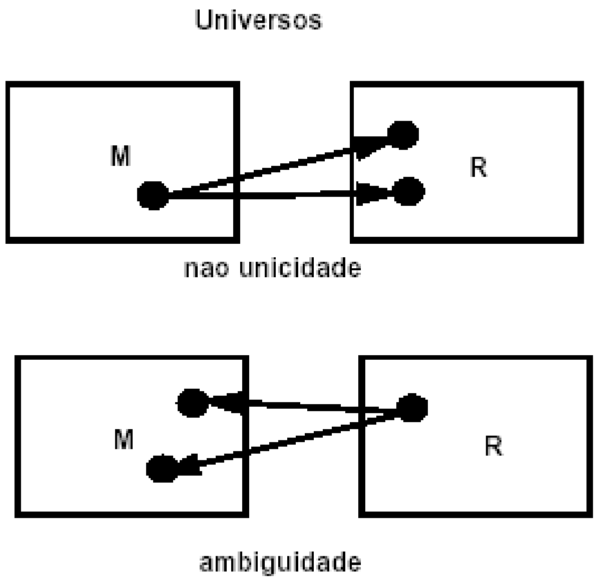
BSP-Trees



a
g
f
e
d
c
b
Orignal B-rep
1
a
6
f
3
5
e
d 7
c
4
2
b
Spatial Partitioning
a
1
b
2
c
3
d
4
e
5
f
6
7
Binary Tree

Ambigüidade e Unicidade

- Uma representação é única quando o modelo associado possui uma única representação.
- Uma representação é ambígua quando pode representar mais de um modelo.
- Representação ambígua é catastrófica (wireframe).
  - Inviabiliza máquinas de controle numérico.



Conversão entre Representações

- Conversão CSG $\rightarrow$ B-rep é denominada **avaliação do bordo**.
- Conversão B-rep $\rightarrow$ CSG é muito mais complicada.
- Conversão B-rep $\rightarrow$ Células é simples.
- Conversão Células $\rightarrow$ B-rep é relativamente simples (marching cubes).
- Conversão CSG $\rightarrow$ Células é simples.
- Conversão Células $\rightarrow$ CSG é complicado.