Introdução à Computação Gráfica
Superfícies

Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Superfícies Paramétricas

- Pontos são dados por funções $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$
- Um caso simples: polinomiais de grau 1 (interpolação bilinear)

$$x(s,0) = (1-s)P_{0,0} + sP_{1,0}$$

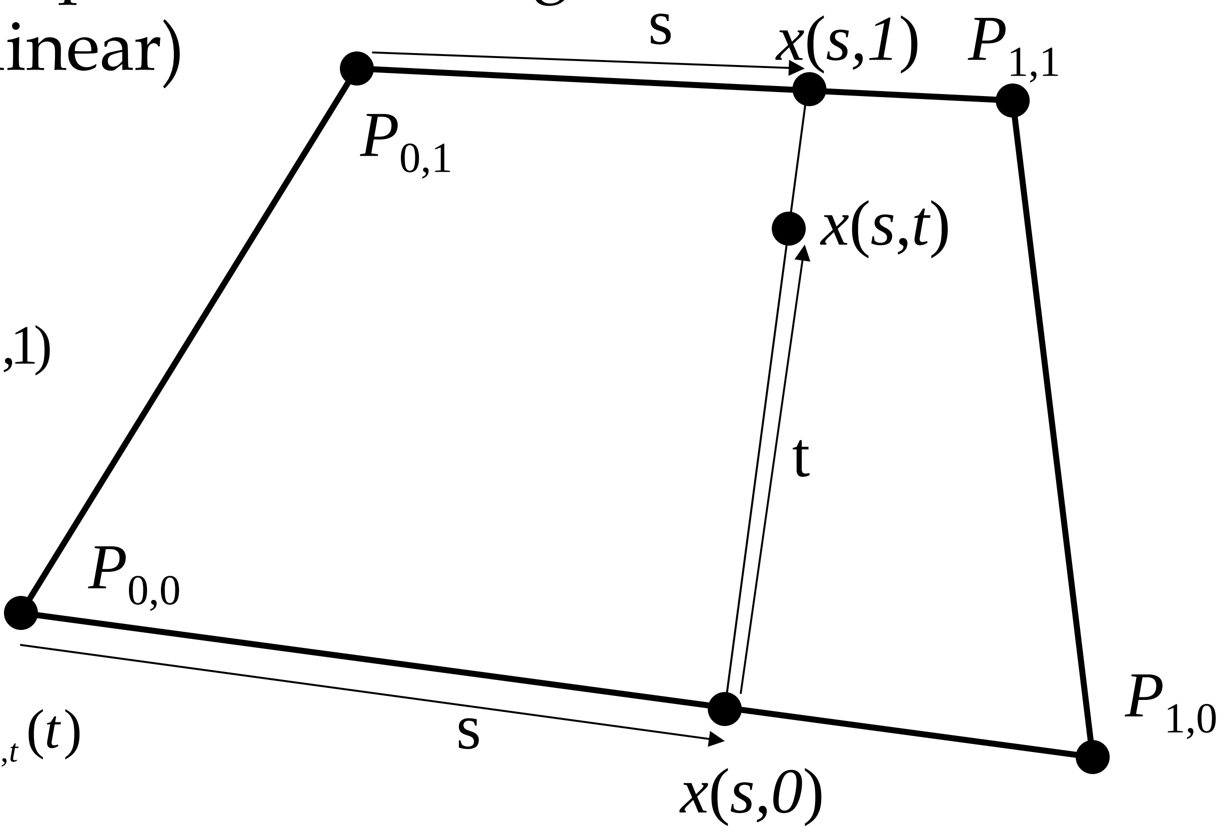
$$x(s,1) = (1-s)P_{0,1} + sP_{1,1}$$

$$x(s,t) = (1-t)x(s,0) + tx(s,1)$$

$$F_{0,s} = 1-s, \quad F_{1,s} = s$$

$$F_{0,t} = 1-t, \quad F_{1,t} = t$$

$$x(s,t) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{i,j}F_{i,s}(s)F_{j,t}(t)$$



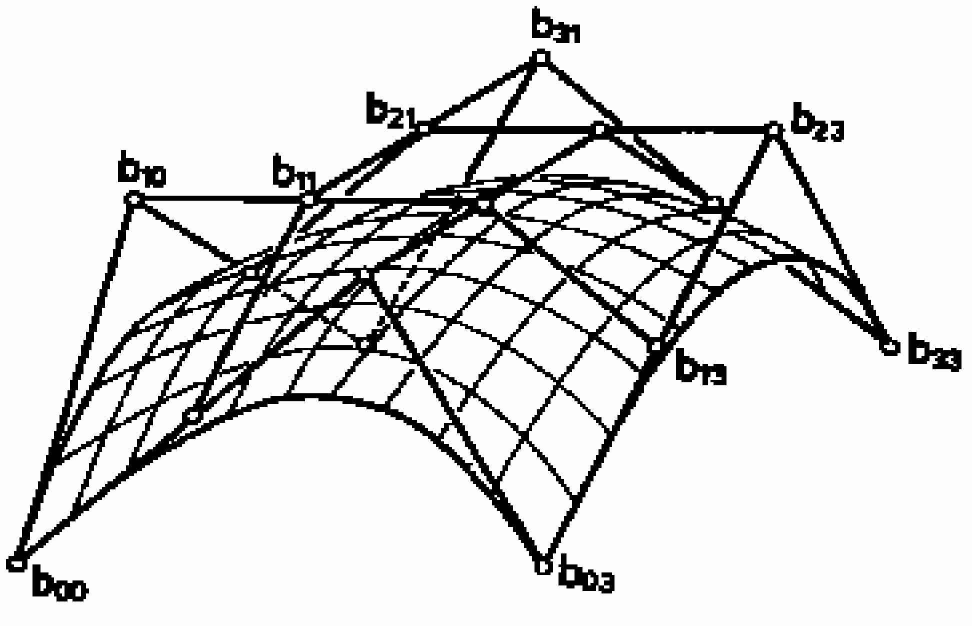
Retalhos de Superfície e Produto Tensorial

- Produto tensorial de duas curvas em forma paramétrica = superfície em forma paramétrica
- Fórmula geral: $$\mathbf{x}(s,t) = \sum_{i=0}^{d_s} \sum_{j=0}^{d_t} \mathbf{P}_{i,j} F_{i,s}(s) F_{j,t}(t)$$
- Superfície definida para um retângulo no espaço de parâmetros
  - Tipicamente: $0 \leq s < 1$, $0 \leq t < 1$
- Forma da superfície especificada por uma grade de controle
  - 2 x 2 pontos para uma superfície bilinear
  - 3 x 3 pontos para uma superfície biquadrática
  - etc

Retalhos Bézier

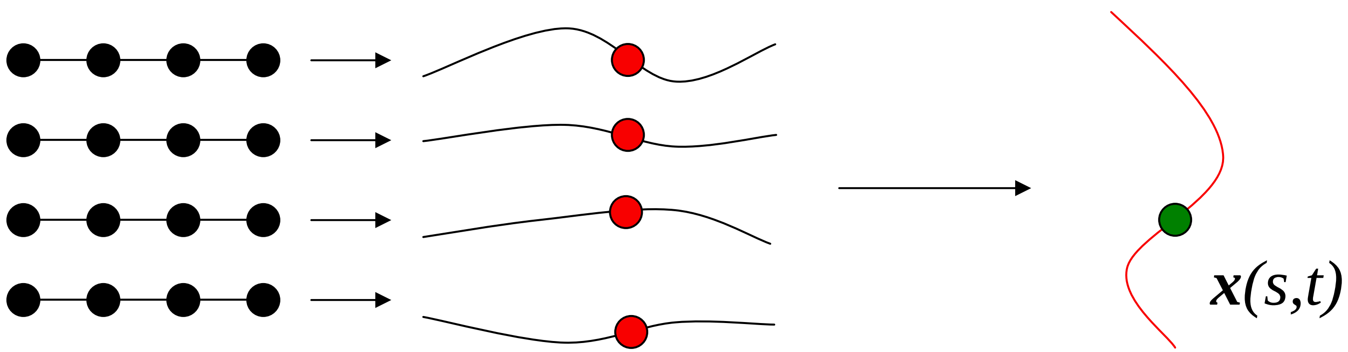
$$\mathbf{x}(s,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(s) B_j^m(t)$$

- Como as curvas Bézier, $B_i^n(s)$ e $B_j^m(t)$ são os polinômios de Bernstein de graus n e m, respectivamente
- Freqüentemente $n = m = 3$
  - Necessários 4x4 = 16 pontos de controle, $P_{i,j}$



Retalhos de Bézier

- Curvas na fronteira são curvas de Bézier
- *Qualquer* curva para *s* ou *t* constante é uma curva Bézier
- Podemos pensar assim:
  - Cada linha da grade com 4 pontos de controle define uma curva de Bézier para o parâmetro *s*
  - Ao avaliar cada curva para um mesmo *s* obtemos 4 pontos de controle “virtuais”
  - Pontos de controle “virtuais” definem uma curva Bézier em *t*
  - Avaliando esta curva em um dado *t* resulta no ponto ***x****(s,t)*



Propriedades dos Retalhos de Bézier

- O retalho interpola os pontos dos cantos da grade de controle
  - Decorre das propriedades análogas das curvas de Bézier
- O plano tangente em um ponto do canto é dado pelas duas arestas da grade incidentes no ponto
  - Decorre do fato que as curvas Bézier das fronteiras incidentes têm tangentes definidas pelas arestas correspondentes
- O retalho é restrito ao fecho convexo da grade de controle
  - As funções de base somam 1 e são positivas em toda parte

Retalhos Bézier em Forma Matricial

$$x(s,t) = S^T B^T P B T$$

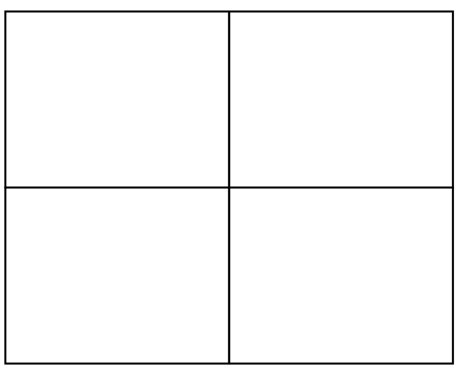
$$x(s,t) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Se os pontos de controle não se modificam, pode-se pré-computar o produto das 3 matrizes do meio:

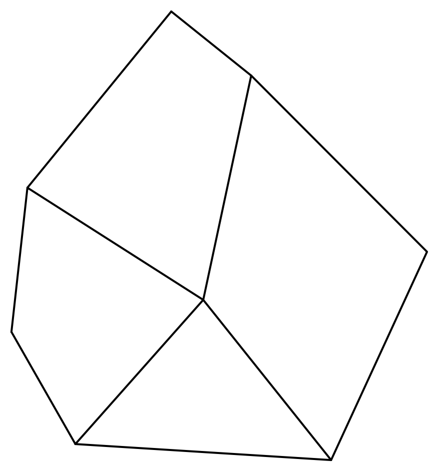
$$x(s,t) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Malhas de Retalhos Bézier

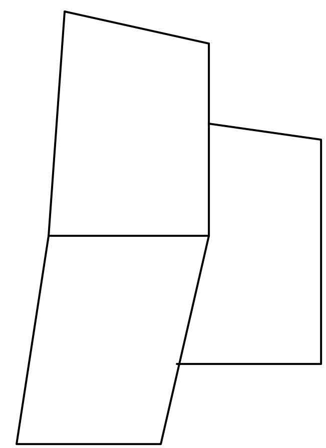
- São malhas compostas de diversos retalhos unidos ao longo de suas fronteiras
  - As arestas das grades de controle precisam se justapor perfeitamente
  - As grades precisam ser retangulares



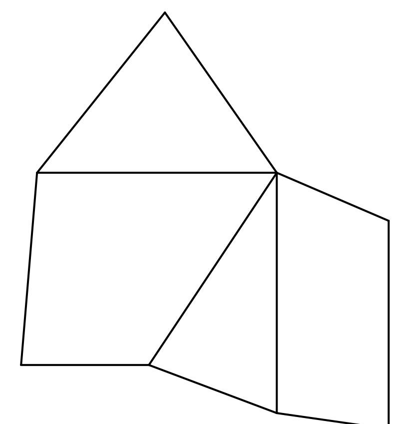
OK



OK



Não



Não

Continuidade em Malhas de Retalhos Bézier

- Como no caso das curvas Bézier, os pontos de controle precisam satisfazer restrições para assegurar continuidade paramétrica
- Continuidade ao longo das arestas dos retalhos:
  - $C^0 \rightarrow$ Pontos de controle da aresta são os mesmos em ambos retalhos
  - $C^1 \rightarrow$ Pontos de controle vizinhos aos da aresta têm que ser colineares e eqüidistantes
  - $C^2 \rightarrow$ Restrições sobre pontos de controle mais distantes da aresta
- Para obter continuidade geométrica, as restrições são menos rígidas
  - $G^1 \rightarrow$ Pontos de controle vizinhos aos da aresta têm que ser colineares mas não precisam ser eqüidistantes
- Para obter continuidade C^1 nos vértices das grades
  - Todas as arestas incidentes no ponto têm que ser colineares

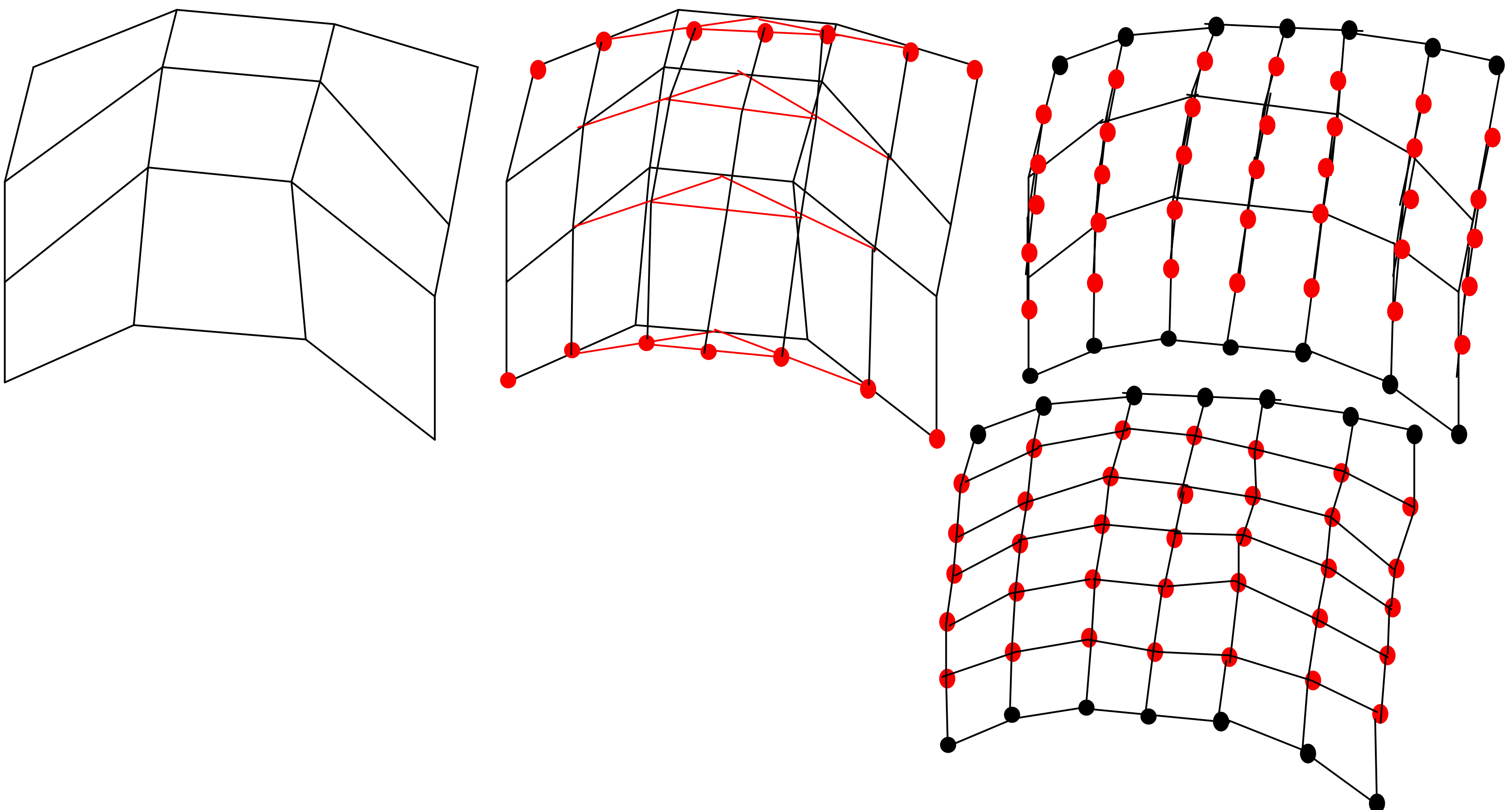
Desenhando Retalhos Bézier

- **Opção 1**: Avaliar o retalho para um conjunto de pontos do domínio paramétrico e triangular
  - Normalmente, *s* e *t* são tomados em intervalos (regulares ou não) de forma que os pontos avaliados formam uma grade
  - Cada célula da grade é constituída de quatro pontos que vão gerar 2 triângulos
  - Não se usa quadriláteros visto que os pontos não são necessariamente co-planares
  - Renderização fácil com *triangle strips*
  - Vantagem: Simples e suportado pelo OpenGL
  - Desvantagem: Não há uma maneira fácil de controlar o aspecto da superfície de forma adaptativa

Desenhando Retalhos Bézier

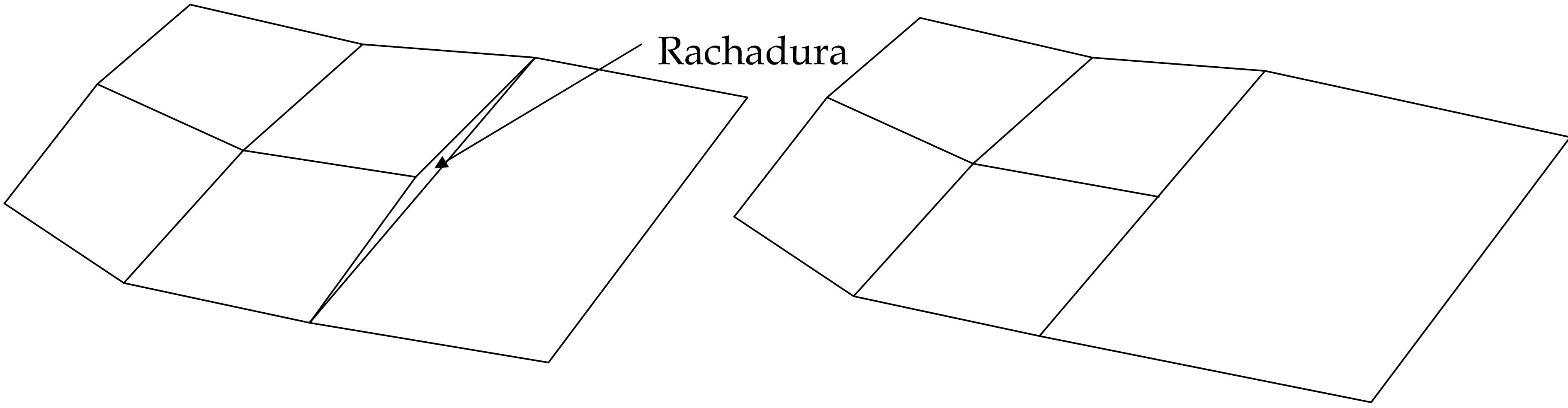
- **Opção 2**: Usar subdivisão
  - Permite controle de erro durante a aproximação
  - Definida de forma semelhante à subdivisão de curvas Bézier, mas refinamento é feito de forma alternada nos dois eixos de parâmetros
  - Sucessivamente computar pontos médios dos vértices e uní-los
    - Aplicar procedimento inicialmente em cada linha da grade de controle: 4x4 → 4x7
    - Repetir procedimento para cada coluna da grade de controle: 4x7 → 7x7

Midpoint Subdivision



Procedimento Adaptativo

- Através da subdivisão obtemos 4 grades de controle e testamos:
  - Se a grade é aproximadamente plana, ela é desenhada
  - Senão, subdividir em 4 sub-grades e aplicar o procedimento recursivamente
- Problema: Retalhos vizinhos podem não ser subdivididos uniformemente
  - Rachaduras: polígonos de controle não se justapõem
  - Pode ser consertado forçando grades mais subdivididas a se justaporem às grades menos subdivididas ao longo da aresta comum



Computando o Vetor Normal

- Derivadas parciais em relação a *t* e a *s* pertencem ao plano tangente
- Vetor normal é calculado normalizando o produto cruzado de ambas

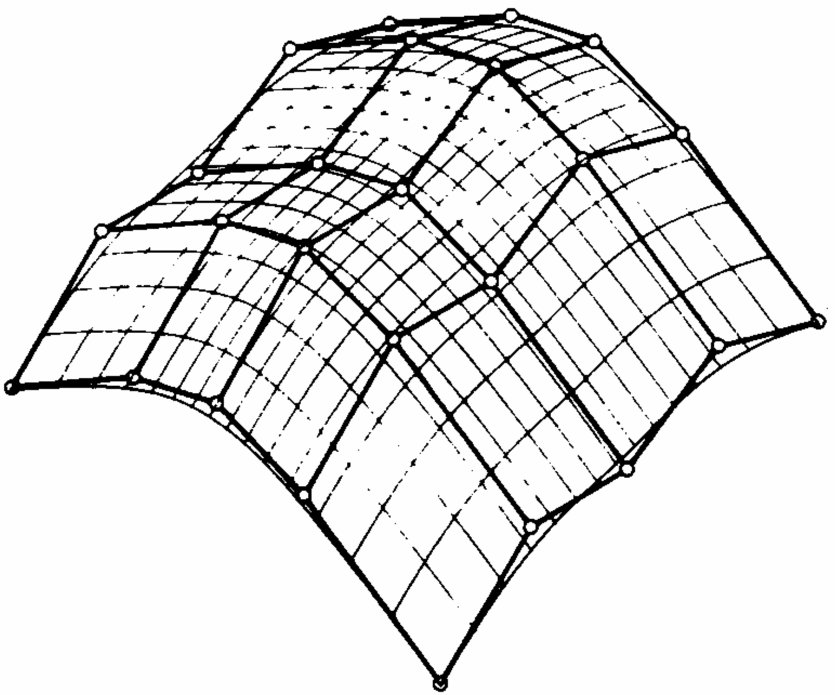
$$\left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right|_{s,t} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{i,j} \left.\frac{dB_i^n}{ds}\right|_{s} B_j^m(t) \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right|_{s,t} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(s) \left.\frac{dB_j^m}{dt}\right|_{t}$$

$$\mathbf{n} = \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}\right|_{s,t} \times \left.\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right|_{s,t} \qquad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

Retalhos B-spline

$$\mathbf{x}(s,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\mathbf{P}_{i,j}B_i(s)B_j(t)$$

- $B_i(s)$ e $B_j(t)$ são as funções da base B-spline
- É necessário fornecer dois vetores de nós, um para cada direção (parâmetros)
- Também podemos ter superfícies B-spline uniformes e não uniformes



Forma Matricial das funções B-spline bicúbicas

$$\mathbf{P}(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} MPM^T \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Onde P é a matriz de pontos de controle e M é a matriz de coeficientes

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,0} & \mathbf{P}_{2,1} & \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} \\ \mathbf{P}_{3,0} & \mathbf{P}_{3,1} & \mathbf{P}_{3,2} & \mathbf{P}_{3,3} \end{bmatrix} \qquad M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

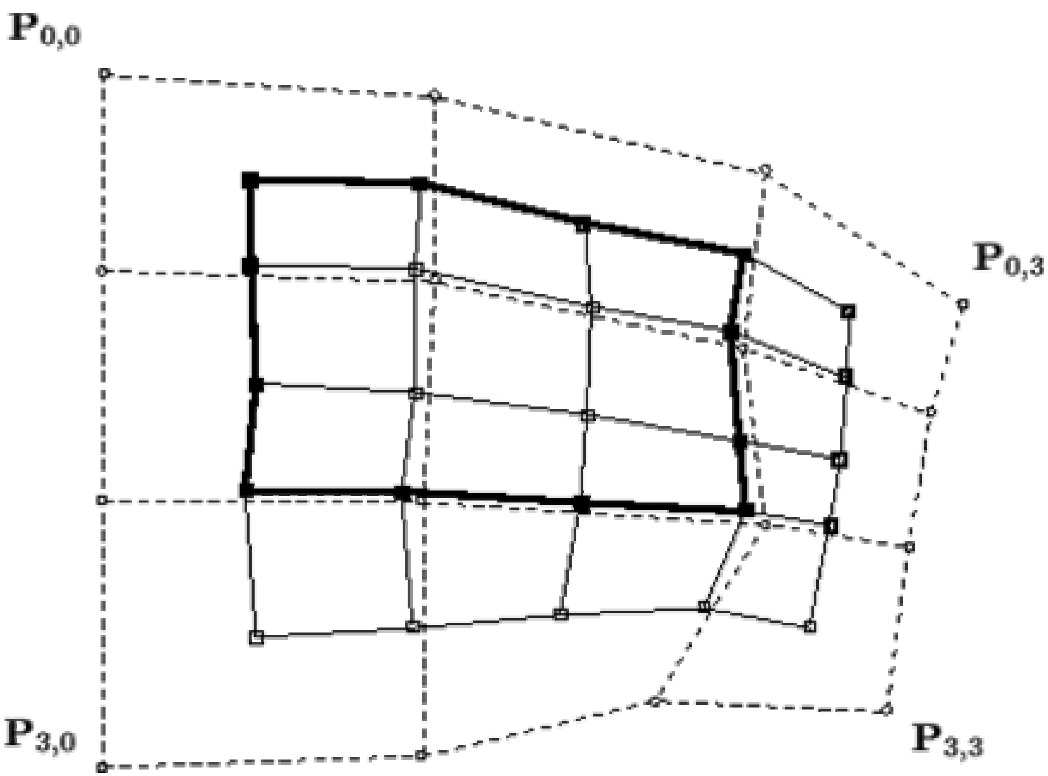
Avaliando Retalhos B-spline Uniformes

- Como todas as funções de base são translações de uma mesma função
  - Seja $a = \lfloor s \rfloor$, $b = \lfloor t \rfloor$
  - Computar: $u = s - a$, $v = t - b$
  - Usar funções da base para intervalo [0,1)

$$\mathbf{x}(s,t) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \mathbf{P}_{a+i,b+j} B_i(u) B_j(v)$$

Subdivisão de Retalhos B-spline

- A grade de controle de uma B-spline bicúbica pode ser subdividida em 4 sub-grades permitindo um esquema de desenho adaptativo
  - 25 pontos de controle são gerados divididos em 4 grupos de 9
  - http://graphics.cs.ucdavis.edu/CAGDNotes/Cubic-B-Spline-Surface-Refinement/Cubic-B-Spline-Surface-Refinement.html



Propriedades dos Retalhos B-spline

- Retalho restrito ao fecho convexo da grade de controle
- Continuidade é C^2 para B-splines bicúbicas
- Pode-se forçar interpolação através da duplicação dos nós de controle
  - Problema: Derivadas parciais desaparecem e normais ficam indefinidas
  - Solução: Usar ponto próximo da superfície ou estimar pela média das normais da grade de controle
  - Melhor ainda: Usar B-splines interpoladoras
- O uso de B-splines não uniformes dá mais controle à modelagem
- Retalhos NURBS podem ser também definidos