

SNAKES IMPLÍCITAS - APLICAÇÃO A IMAGENS OBTIDAS POR
ULTRA-SONOGRAFIA

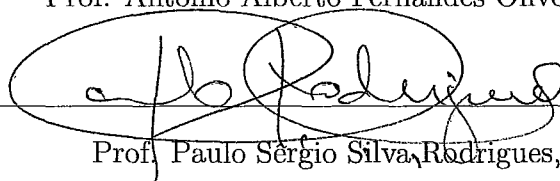
Diego Mazala Carvalho Rodrigues

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

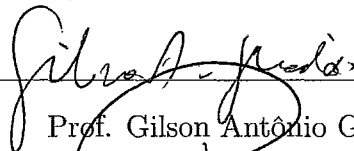
Aprovada por:



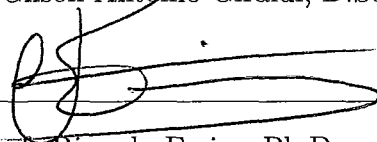
Prof. Antônio Alberto Fernandes Oliveira, D.Sc.



Prof. Paulo Sérgio Silva Rodrigues, D.Sc.



Prof. Gilson Antônio Giraldo, D.Sc.



Prof. Ricardo Farias, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2008

RODRIGUES, DIEGO MAZALA
CARVALHO

Snakes Implícitas - Aplicação a Imagens Obtidas por Ultra-sonografia [Rio de Janeiro] 2008

XIII, 94 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2008)

Dissertação – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Snakes Implícitas
2. Segmentação de Imagens
3. Level Sets

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*Ao meu pai, que se foi durante
o curso deste trabalho e não teve
tempo de participar da conclusão
de mais esta etapa em minha
vida.*

Agradecimentos

Sei que serei incapaz de registrar meus agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, mas não serei negligente ao ponto de desperdiçar esta oportunidade e pelo menos tentar prestar minha gratidão a quem é devida.

Primeiramente, quero agradecer à minha família. A cada um daqueles que jamais mediram esforços para me ajudar a caminhar. Em especial a minha mãe, minha amiga e conselheira. Estou certo de que suas orações e seu impecável exemplo sempre me sustentaram e ainda o fazem até hoje. Agradeço sua ajuda incondicional e peço desculpas pela ausência tão freqüente. Hoje, mesmo distante, a senhora é e continuará sendo meu grande exemplo de vida. Muito obrigado, mãe.

A minha amável esposa, por todo o apoio e compreensão na minha ausência. Você conseguiu namorar, noivar e casar comigo durante o mestrado. Incrível! Obrigado por me permitir dividir a vida com você. Te amo.

Aos meus amigos(irmãos) Algemiro e Bruno. Nós sabemos o quanto lutamos para que o mestrado fosse um sonho alcançável. Ainda estão na memória cada uma daquelas nossas conversas de apoio e incentivo mútuo. Devo muito a vocês. Obrigado pela oportunidade de trabalhar e estudar com vocês.

Ao Prof. Paulo Sérgio, por um dia ter acreditado em mim e me permitir ser seu aluno de iniciação científica, onde tudo começou. Agradeço por cada uma das aulas ministradas, pelos conselhos, pelos momentos de lazer, e por todo o tempo investido para que hoje eu pudesse escrever este texto.

Ao Prof. Antônio Oliveira, por toda atenção e inesgotável paciência explicando aquilo que lhe parecia tão trivial e que meu intelecto insistia em não compreender. Obrigado por me aceitar como aluno e me orientar durante todo este período.

Aos colegas de mestrado, pela agradável convivência, por todos os almoços e

cafezinhos que desfrutamos juntos, e por todo o aprendizado que pude obter com vocês.

Aos demais professores com quem convivi nos laboratórios e nas salas de aula, por seus exemplos e por todo empenho na ministração das aulas.

Devo um agradecimento, também, àqueles que por qualquer motivo disseram que eu não poderia ou não conseguiria entrar no mestrado, e após estar cursando, que não concluiria o curso. Agradeço pelas duras palavras mas que foram essenciais para me motivar e fortalecer nos momentos de maior dificuldade.

E por último, mas sem dúvida o mais importante, ao meu Senhor e Salvador Jesus Cristo. A quem plantou em meu coração este sonho e que foi responsável pela realização de mais este milagre. Senhor, estou certo de que não só minha carreira profissional como toda a minha vida é fruto da tua misericórdia e do teu amor para comigo. Se há alguma honra ou glória neste momento, que seja para Ti, o responsável pela conclusão de mais esta etapa em minha vida. Obrigado por realizar mais este sonho. Te amo, Senhor.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SNAKES IMPLÍCITAS - APLICAÇÃO A IMAGENS OBTIDAS POR ULTRA-SONOGRAFIA

Diego Mazala Carvalho Rodrigues

Junho/2008

Orientador: Antônio Alberto Fernandes Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Nesta dissertação é apresentado um estudo sobre os métodos de *snakes* implícitas aplicados à segmentação de imagens médicas, mais especificamente àquelas obtidas por ultra-sonografia. Primeiramente, é descrita a metodologia dos *level sets*, sobre a qual são formulados os modelos de *snakes* implícitas. Em seguida, são discutidas algumas aplicações envolvendo os *level sets* e, principalmente, sua utilização em segmentação de imagens médicas. Com o objetivo de testar e comparar as principais técnicas de segmentação em ultra-sonografias descritas neste trabalho, foi implementada uma aplicação e submetida à ela uma base de imagens para segmentação. Os resultados foram comparados com a segmentação manual realizada por dois especialistas no assunto.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

IMPLICIT SNAKES - APPLICATION TO ULTRASOUND IMAGES

Diego Mazala Carvalho Rodrigues

June/2008

Advisor: Antônio Alberto Fernandes Oliveira

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this dissertation is presented a study about the implicit snakes methods applied to medical image segmentation, more specifically to ultrasound images. Firstly, it is described the level set methodology, upon which the implicit snakes are based. Then, some applications using level sets and, mainly, its usage on medical image segmentation are discussed. In order to test and compare some of the main techniques in ultrasound segmentation described in this work, it was implemented an application, by which a set of images were segmented. The results were compared against the manual segmentations accomplished by two specialists on this subject.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Segmentação de Imagens	1
1.2 Algoritmos para Segmentação	1
1.3 Imagens de Interesse	2
1.4 Proposta	4
2 Level Sets	6
2.1 Idéia Inicial	7
2.2 Conceitos	7
2.3 Movimento	8
2.4 Movimento por Curvatura	9
2.5 Representação	10
2.6 Escolha da função de velocidade	13
2.7 Inicializando a curva	15
2.8 Cálculo da função distância	15
2.9 Vantagens do Level Set	17
2.10 Complexidade	18
2.11 Aplicações	18
3 Contornos Ativos	20
3.1 Snakes	20
3.2 T-Snakes	22

3.3	Variantes dos Modelos Implícitos	23
3.4	Level Sets sem Regularizadores	24
3.4.1	Com critério de parada baseado no gradiente	24
3.4.2	Com critério de parada baseado na resistência da aresta	25
3.4.3	Com critério de parada baseado na minimização da área	26
3.5	Level Sets com Regularizadores	26
3.5.1	Baseados em Clusterização	26
3.5.2	Baseados em Modelos Bayesianos	27
4	Segmentação de Ultra-sonografias	29
4.1	Classificação por nível de intensidades	30
4.2	Classificação baseada na variância da intensidade dos pixels	31
5	Implementação	34
5.1	Algoritmos	34
5.1.1	Entrada e saída	35
5.1.2	Criação da estrutura de dados	35
5.1.3	Atualização da estrutura de dados	37
5.1.4	Obtenção da curva final	37
5.2	Interface Gráfica	38
5.3	Ferramentas	39
5.4	Download	40
6	Resultados	41
7	Conclusão	50
A	Convertendo da formulação paramétrica para a implícita	53
A.1	Energia de Campo	54
A.2	Energia Interna	60
A.3	Energia Total	61
A.4	Evolução da Snake Segundo a Direção de Máximo Decréscimo	62
A.5	Formulação Implícita	64
A.6	Fórmula Geral	67

B Regiões de uma Curva Fechada	69
C Relação entre Curvatura e Divergente	72
Referências Bibliográficas	78

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de imagem com uma região de interesse segmentada. Neste caso, a região é um tumor.	2
1.2	Classificação para os algoritmos de modelos deformáveis.	3
1.3	Amostra de algumas ultra-sonografias. Considere, neste exemplo, as regiões mais escuras como sendo de interesse. Note que estas não possuem suas bordas bem definidas.	4
2.1	Exemplos de curvas fechadas simples e não simples.	8
2.2	Nos pontos onde a curvatura é positiva a curva se movimenta para dentro. Onde ela é negativa a curva se move para fora.	10
2.3	Representação da frente de propagação.	11
2.4	Evolução da interface ao longo do tempo.	12
2.5	Representação gráfica da evolução de uma curva e os valores da função na grade.	16
3.1	Classificação dos modelos deformáveis.	24
4.1	Exemplo em que a curva ultrapassa a borda da região de interesse. . .	30
5.1	Fluxograma da implementação dos algoritmos de segmentação.	36
5.2	Interface gráfica para interação entre o usuário e os algoritmos de segmentação de imagens.	39
6.1	Resultados para ultra-sonografia 012.	43
6.2	Resultados para ultra-sonografia 030.	43
6.3	Resultados para ultra-sonografia 040.	44
6.4	Resultados para ultra-sonografia 080.	44

6.5	Resultados para ultra-sonografia 105.	45
6.6	Resultados para ultra-sonografia 130.	45
6.7	Resultados para ultra-sonografia 140.	46
6.8	Resultados para ultra-sonografia 170.	46
A.1	Representação do vetor \bar{N} .	59
B.1	Um curva fechada e suas regiões.	69

Lista de Tabelas

6.1	Medida de erro: Ultra-sonografia 012	43
6.2	Medida de erro: Ultra-sonografia 030	43
6.3	Medida de erro: Ultra-sonografia 040	44
6.4	Medida de erro: Ultra-sonografia 080	44
6.5	Medida de erro: Ultra-sonografia 105	45
6.6	Medida de erro: Ultra-sonografia 130	45
6.7	Medida de erro: Ultra-sonografia 140	46
6.8	Medida de erro: Ultra-sonografia 170	46
6.9	Tabela de parâmetros utilizados para testes da abordagem proposta por Caselles [1]. Ver seção 3.4.1. A primeira coluna é o parâmetro α descrito na Equação 3.6, a segunda é o número de iterações utilizado nos testes mostrados, e a última coluna é o raio da curva inicial em pixels.	47
6.10	Tabela de parâmetros utilizados para testes da abordagem proposta por Mora[2]. Ver seção 4.2. A primeira coluna é o termo multiplicador da curvatura, a segunda é um multiplicador do termo da imagem, a terceira é o número de iterações necessárias para o alcance da borda, e a última coluna é o raio da curva inicial em pixels.	48
6.11	Tabela de parâmetros utilizados para testes da abordagem proposta por Yang[3]. Ver seção 4.1. A primeira coluna é o termo multiplicador da curvatura, a segunda é um multiplicador do termo da imagem, a terceira é o número de iterações necessárias para o alcance da borda, e a última coluna é o raio da curva inicial em pixels.	48

Capítulo 1

Introdução

1.1 Segmentação de Imagens

Segundo Schenke [4], segmentar uma imagem significa particioná-la em regiões não-intersectantes, tal que cada região seja homogênea em relação a um determinado critério. No contexto relacionado às imagens médicas, a segmentação tem como objetivo delinear estruturas anatômicas ou quaisquer outras regiões de interesse, tais como órgãos e artérias [3] (veja Figura 1.1). Esta é uma tarefa importante, já que pode ser usada, em diversos campos da medicina, como por exemplo no acompanhamento de um feto durante a gravidez, na descrição das paredes de uma artéria ao longo de sua extensão, na separação de células em uma dada amostra ou no diagnóstico de um tumor. Logicamente, cada uma destas aplicações deve ser acompanhada de perto por um especialista que dê validade aos resultados obtidos pela segmentação automática.

1.2 Algoritmos para Segmentação

Embora estes algoritmos possuam os mesmos objetivos - identificar e representar de maneira eficiente uma determinada área de interesse em uma imagem - existem inúmeras abordagens e implementações propostas para que tais metas sejam alcançadas.

Dentre estas abordagens, podemos destacar dois princípios básicos sobre os quais classes diferentes de algoritmos se fundamentam: o da descontinuidade e o da simi-

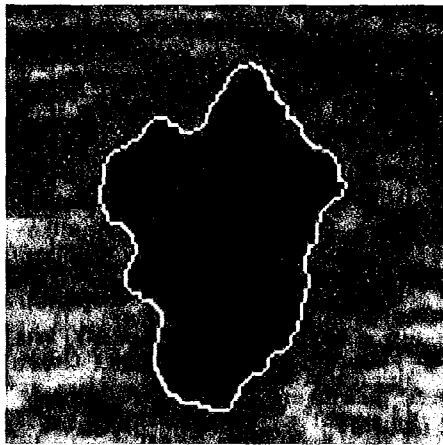


Figura 1.1: Exemplo de imagem com uma região de interesse segmentada. Neste caso, a região é um tumor.

laridade. O primeiro está relacionado à detecção das alterações abruptas nos níveis de intensidades dos pixels da imagem. O segundo conecta os pixels de uma região comum através da similaridade existente entre eles [5]. Embora possamos até fazer uso da similaridade, nosso foco estará sobre a primeira classe de algoritmos, na qual estão os procedimentos básicos empregando modelos deformáveis. Neste contexto, optou-se ainda pelos modelos contínuos com formulação implícita, onde se localizam os algoritmos baseados em curvas de nível (*level sets*). A Figura 1.2 mostra uma classificação para estes algoritmos.

1.3 Imagens de Interesse

A fim de restringir a área de pesquisa abrangida por este trabalho, decidiu-se por estudar a aplicação dos algoritmos de modelos deformáveis na segmentação de imagens médicas. Assim, restaria ainda observar em qual tipo de imagem médica: imagens de raios x, tomografia computadorizada, ressonância magnética, ultra-sonografia, dentre outras. Apesar da aplicabilidade de alguns dos algoritmos estudados em mais de uma destas classes, trabalhou-se principalmente com as imagens geradas por ultra-sonografia.

A ultra-sonografia, também conhecida como eco-grafia, é um método diagnóstico que aproveita o eco produzido pelo som para ver em tempo real as sombras produzidas pelas estruturas e órgãos do organismo. Os aparelhos de ultra-som em geral uti-

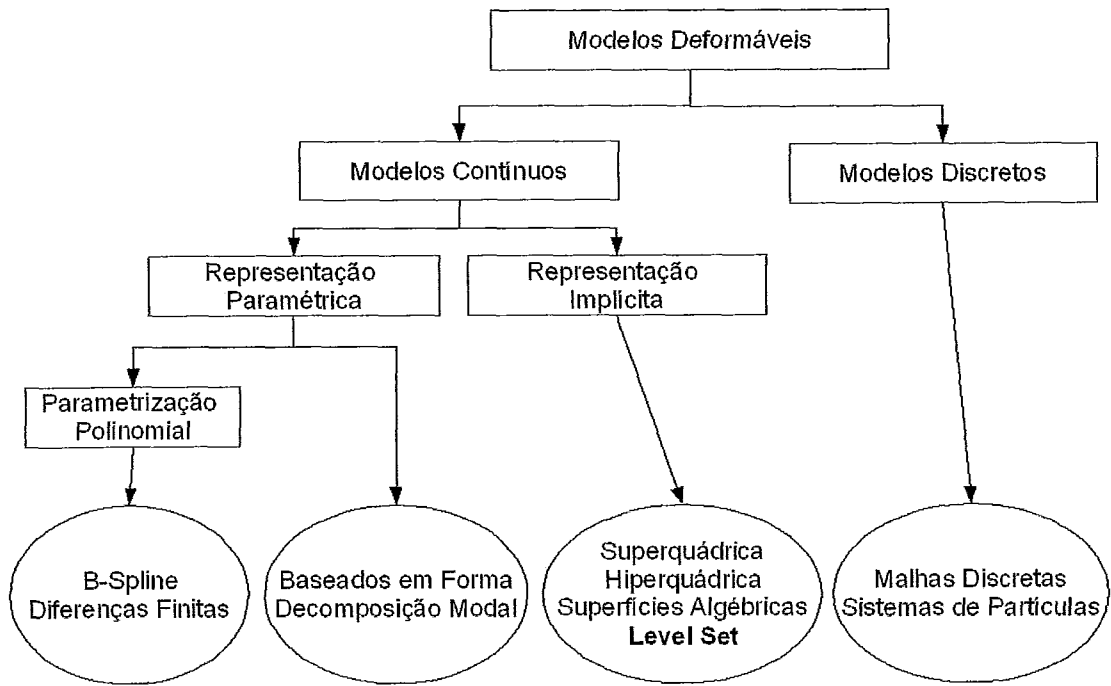


Figura 1.2: Classificação para os algoritmos de modelos deformáveis.

lizam uma frequência próxima de 1 MHz, emitindo através de uma fonte de cristal piezoelétrico que fica em contato com a pele recebendo os ecos gerados. Conforme a densidade e composição das estruturas, a atenuação e mudança de fase dos sinais emitidos varia, sendo possível a tradução em uma escala de cinza, que formará a imagem dos órgãos internos [6]. A ultra-sonografia é um dos métodos de diagnóstico por imagem mais versáteis e presentes na medicina, de aplicação relativamente simples e com baixo custo operacional.

Devido ao processo de aquisição, estas imagens possuem algumas características que as distinguem das demais. Dentre elas, podemos destacar duas principais: pouca definição das bordas e presença de *speckles* - ruídos multiplicativos localmente distribuídos. Considerando que os métodos de segmentação baseados em *snakes* fazem uso, geralmente, de informações extraídas do gradiente da imagem, as características destacadas acima tornam a segmentação de ultra-sonografias um trabalho relativamente distinto das demais aplicações em imagens médicas, já que o gradiente não seria suficiente para deter a evolução da curva nos pontos de bordas mal definidas.

A Figura 1.3 mostra alguns exemplos de ultra-sonografias. Repare a dificuldade

em definir com precisão a fronteira entre uma determinada região de interesse - área central mais escura - e o resto da imagem. Obviamente, a correta definição da fronteira da área de interesse deverá ser apontada por um especialista.

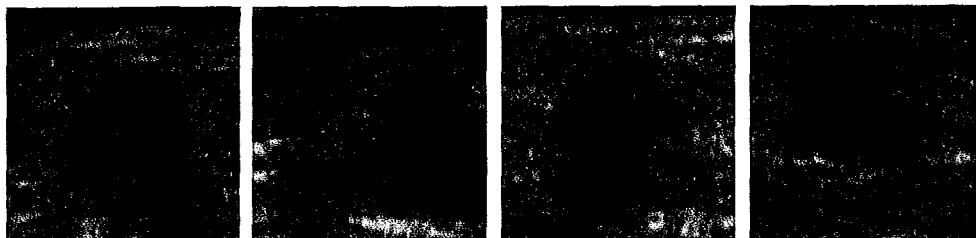


Figura 1.3: Amostra de algumas ultra-sonografias. Considere, neste exemplo, as regiões mais escuras como sendo de interesse. Note que estas não possuem suas bordas bem definidas.

1.4 Proposta

O objetivo desta tese é apresentar um estudo sobre os principais métodos de contornos ativos implícitos aplicados à segmentação de imagens médicas. Iniciamos com uma pesquisa descrevendo o modelo dos *level sets*, apresentados originalmente por Osher e Sethian em [7]. Nela, deverão ser abordados os conceitos de evolução da curva, desenvolvimento da função de velocidade, cálculo da curvatura e do vetor normal, e manipulação de mudanças topológicas, como divisões e uniões entre curvas.

Em seguida, será apresentado um estudo sobre alguns dos principais algoritmos de contornos ativos implícitos aplicados à segmentação de imagens médicas. Neste estudo, separaremos as abordagens em duas classe principais: os métodos que fazem uso dos regularizadores - agregam informações estatísticas da região ao modelo de evolução da curva - e os sem regularizadores - baseados somente nas informações de gradiente e curvatura.

Será apresentado ainda um estudo destes algoritmos aplicados, especificamente, à segmentação de ultra-sonografias. Os modelos abordados pertencem a classe de algoritmos de segmentação que fazem uso dos regularizadores. Esta estratégia é usada para prevenir um possível ultrapassagem da curva de evolução nos pontos onde a borda possui pouca definição. Além disso, estes modelos possuem ainda mecanismos de adaptação à *speckles*, característica comum às imagens geradas por

ultra-sonografias. Nos métodos de segmentação sem regularizadores, esses *speckles* podem deter a evolução da curva em regiões que não representam fronteiras, já que eles podem apresentar um valor de gradiente elevado.

Para validar, testar e comparar os métodos estudados, será realizada a implementação destes algoritmos, bem como a de uma interface gráfica que ofereça praticidade na interação com os modelos de segmentação. Esta aplicação deverá ainda ser multi-plataforma - permitir a execução em diferentes sistemas operacionais - e ser desenvolvida em sua totalidade com ferramentas gratuitas, evitando assim a geração de custos no desenvolvimento e na distribuição da aplicação.

Este trabalho está dividido da seguinte forma: o Capítulo 2 introduz a idéia dos *level sets* e mostra algumas aplicações fundamentais sobre esta abordagem; o Capítulo 3 descreve algumas das principais metodologias aplicadas à segmentação de imagens médicas utilizando os *level sets*; o Capítulo 4 se restringe às abordagens propostas para segmentação de ultra-sonografias; o Capítulo 5 descreve a implementação dos algoritmos e da interface gráfica desenvolvida para interação com o usuário; o Capítulo 6 ilustra e discute os resultados obtidos; e, finalmente, o Capítulo 7 apresenta algumas conclusões. Em adicional, nos apêndices podem ser encontradas algumas derivações matemáticas omitidas no corpo deste trabalho.

Capítulo 2

Level Sets

Entende-se como borda a curva que envolve um subconjunto regular do plano. Por meio dela é possível avaliar características inerentes a este subconjunto, tais como posição e área. Além disso, é possível ainda estimar o comportamento deste conjunto, tal como se ele está em movimento ou parado, se o movimento é de expansão ou contração e qual a velocidade desta movimentação, entre outras características.

Entretanto, desenvolver um modelo computacional capaz de descrever estas variáveis de maneira eficiente não é uma tarefa fácil. Foi pensando neste problema que Osher e Sethian, em 1987, desenvolveram a metodologia dos *level sets* [7].

O objetivo destes pesquisadores era fornecer um algoritmo capaz de descrever o movimento realizado por uma frente de propagação. Além disso, este modelo deveria ser robusto o suficiente para lidar com os estímulos físicos que poderiam alterar o estado desta frente de propagação. Alguns exemplos destes fenômenos físicos podem ser vistos quando o vento impulsiona as ondas do mar sobre a praia, quando espalha as chamas do fogo sobre a encosta de uma montanha, ou ainda, quando a gravidade e a viscosidade agem sobre a água ao ser derramada no chão. Nestes casos, as superfícies em movimento seriam a do mar, a da chama de fogo e a da água no chão. Os estímulos físicos seriam o vento, a gravidade e a viscosidade.

Como se estas variáveis já não fossem bastante para gerar suficiente complexidade ao problema, outros fenômenos complicadores deveriam ser administrados, tais como a divisão das suas bordas em duas ou mais curvas, ou ainda, o inverso, a união de duas superfícies distintas em uma única. Usando ainda as ilustrações anteriores, um exemplo poderia ser tomado se o vento dividisse a linha de frente do fogo em duas

componentes e as movimentasse em direções opostas. Em [8], Sethian usa inúmeras ilustrações para explicar a concepção e os problemas que devem ser solucionados pelo método dos *level sets*.

2.1 Idéia Inicial

Para tratar, em especial, este tipo de movimento entre bordas ou superfícies que determinam mudanças topológicas, Osher e Sethian publicaram seu primeiro trabalho sobre *level sets* em 1987 [7]. A idéia principal por trás de sua metodologia estava em adicionar uma dimensão ao problema, ou seja, a descrição do movimento de uma curva bidimensional seria feita num contexto tridimensional. Além disso, a abordagem era diretamente aplicável a problemas n-dimensionais.

A idéia de se adicionar uma dimensão ao problema foi contestada por alguns autores que diziam que a introdução de mais uma coordenada geraria alto custo computacional. Estes autores chegaram a descrever tal solução como um “ato de violência” [9, 8].

No entanto, desde o início das pesquisas, ocorridas no final da década de oitenta, até os dias de hoje, o modelo de *level sets* tem se tornado tema para muitos pesquisadores e área de grande interesse na literatura científica, oferecendo aplicabilidade em diversos ramos da ciência.

Nas próximas seções será explicada com detalhes toda estrutura necessária para se resolver um problema de descrição de bordas através do método de *level sets*. Alguns conceitos básicos inerentes ao assunto, como funções de velocidade, forma de evolução da interface de propagação e forças de parada, serão discutidos ao longo deste capítulo. O objetivo é fornecer o conhecimento necessário para se poder discutir algumas aplicações dos *level sets* em segmentação de imagens.

2.2 Conceitos

Como um exemplo hipotético, imagine um pedaço de corda com suas extremidades coladas, de maneira que ela seja uniforme. Disponha esta corda sobre o chão não permitindo que hajam partes sobrepostas. Uma curva fechada com esta topologia é dita **simplex**. Caso haja sobreposição de segmentos da corda, esta não será

uma curva fechada simples (veja Figura 2.1). Este conceito pode ser estendido ao espaço tridimensional, e assim uma superfície como uma esfera, que não possui auto-intersecções, seria chamada de **superfície fechada simples**.

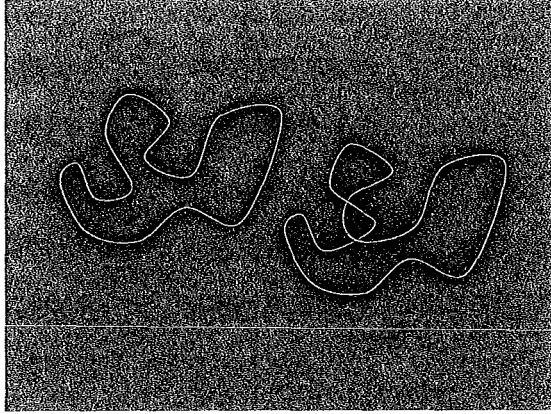


Figura 2.1: Exemplos de curvas fechadas simples e não simples.

Neste trabalho trataremos essencialmente de curvas e superfícies simples. Quando estes conceitos não se aplicarem, isto será indicado explicitamente.

Além disso, deve-se atentar ainda para o conceito de frente de propagação. No contexto desta pesquisa, uma frente deve ser entendida como uma curva ou superfície que separa dois meios que estão interagindo entre si, isto é, ela representa a borda ou fronteira entre duas regiões [10].

2.3 Movimento

Considere agora uma frente de propagação - seja uma curva no R^2 ou uma superfície no R^3 - separando duas regiões e se movendo em direção à normal, que em todo ponto da borda é orientada no mesmo sentido: ou para dentro ou para fora da borda.

A velocidade com a qual a borda se movimenta pode depender de inúmeros fatores. Uma forma de expressar a função velocidade pode ser:

$$F = F(L, G, I) \tag{2.1}$$

onde F é a função velocidade e os parâmetros L , G e I são os fatores dos quais

ela depende. Segundo Sethian [11], de uma maneira geral, estes parâmetros podem ser descritos da seguinte forma:

- L : são as propriedades locais. São aquelas determinadas, por exemplo, por informações geométricas locais, tais como curvatura e vetor normal;
- G : são as propriedades globais da interface. São aquelas que dependem da forma e da posição da interface;
- I : são as propriedades independentes, aquelas que não dependem da forma da interface.

Um dos maiores desafios na abordagem *level set* é produzir um modelo adequado para uma dada função de velocidade F . Este assunto será abordado mais detalhadamente na seção 2.6.

Dados a função velocidade F e a posição da interface, o objetivo agora é descrever o movimento realizado por ela.

2.4 Movimento por Curvatura

Para movimentar uma curva, são necessárias duas informações básicas: direção e velocidade. Como um exemplo de modelo de movimento, podemos tomar a direção como sendo indicada pelo vetor normal da curva e a velocidade como dependente da curvatura. A curvatura mede o quanto varia a inclinação da curva em um determinado ponto [12, 13, 14].

Para exemplificar, podemos pensar em um círculo. Neste caso, a curvatura é sempre constante, seja qual for o ponto considerado. Vale acrescentar que, quanto menor o círculo, maior é sua curvatura, dado que seu valor nesse caso será exatamente o inverso do raio.

O movimento da borda será perpendicular a ela, com velocidade proporcional à sua curvatura. Deve-se observar que, como a curvatura pode ser positiva ou negativa, algumas partes da curva podem ser mover para fora enquanto outras se movimentarão para dentro. A Figura 2.2 ilustra este aspecto.

Neste exemplo, as setas externas indicam que a curvatura é negativa e que portanto, a curva se move para fora. As setas internas indicam que a curvatura é

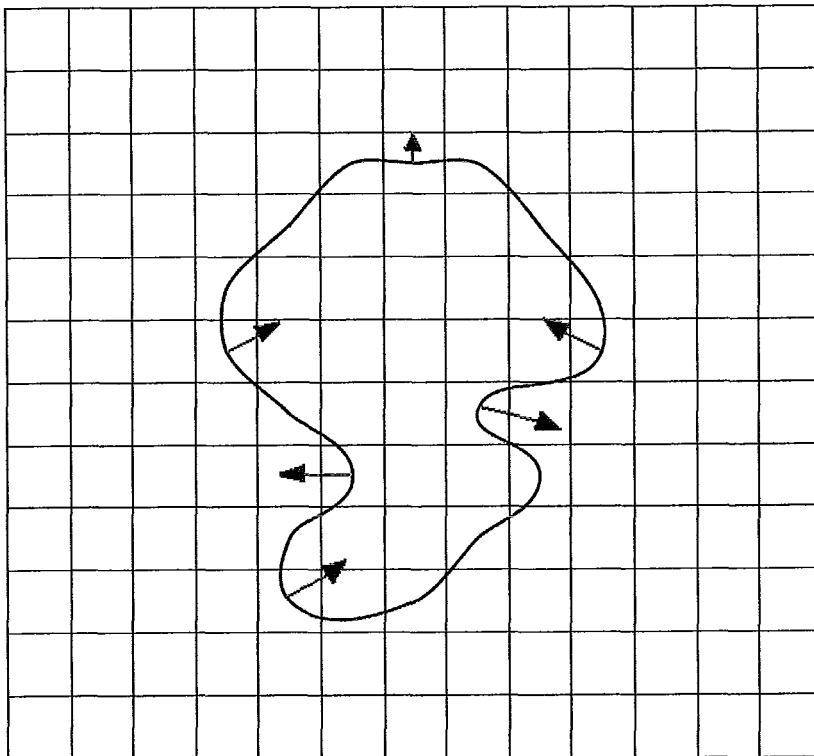


Figura 2.2: Nos pontos onde a curvatura é positiva a curva se movimenta para dentro. Onde ela é negativa a curva se move para fora.

positiva, movendo a curva para dentro. É importante notar que o tamanho das setas é proporcional ao valor da curvatura no referido ponto [15].

Considerando que o movimento com velocidade dependente da curvatura é um componente de muitos fenômenos físicos, existe um esforço contínuo em modelar mecanismos computacionais para descrever tais movimentos. Alguns trabalhos dedicados a modelagem destes fenômenos podem ser citados, tais como [16, 17, 18, 19, 14, 15, 7, 12].

2.5 Representação

Seja a função $z = \phi(x, y, t = 0)$, de forma que dado um ponto qualquer (x, y) ela retorne uma altura z referente a distância entre o ponto (x, y) dado e a frente de propagação no instante de tempo $t = 0$.

Desta forma, o gráfico de ϕ que intersecta o plano xy exatamente na frente de propagação em $t = 0$ é mostrado na Figura 2.3.

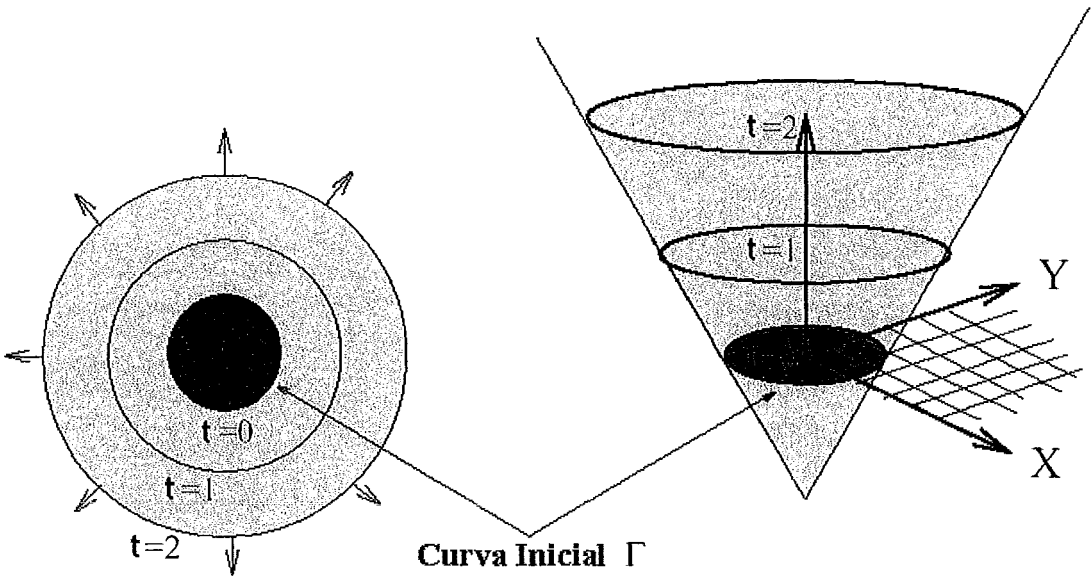


Figura 2.3: Representação da frente de propagação.

O gráfico de ϕ , representado em cinza claro, constitui a chamada “superfície *level set*”. A intersecção dessa superfície com cada plano horizontal delimita um *level set*

A superfície em cinza claro é chamada de superfície *level set* [11, 8], já que aceita qualquer ponto como entrada e devolve um único valor como saída: a distância entre o ponto e a interface. A borda da interface em cinza escuro é chamada de nível zero, ou zero *level set*. Nela estão todos os pontos que possuem distância igual a zero.

Sendo assim, é possível ligar a evolução da função ϕ à propagação da interface em relação ao tempo. Em qualquer momento da evolução, a frente de onda da propagação é dada pelo nível zero da função ϕ (Figura 2.4).

Formalmente, dada uma curva de nível zero C_t no instante t , existem três valores possíveis para a função $\phi(\bullet, \bullet, t)$:

$$\phi(x(t), y(t), t) \begin{cases} > 0, \text{ se } (x, y) \text{ está fora de } C, \\ = 0, \text{ se } (x, y) \text{ está sobre de } C, \\ < 0, \text{ se } (x, y) \text{ está dentro de } C \end{cases} \quad (2.2)$$

Considerando um modelo unidimensional, nós podemos derivar a evolução da frente que é caracterizada pela equação

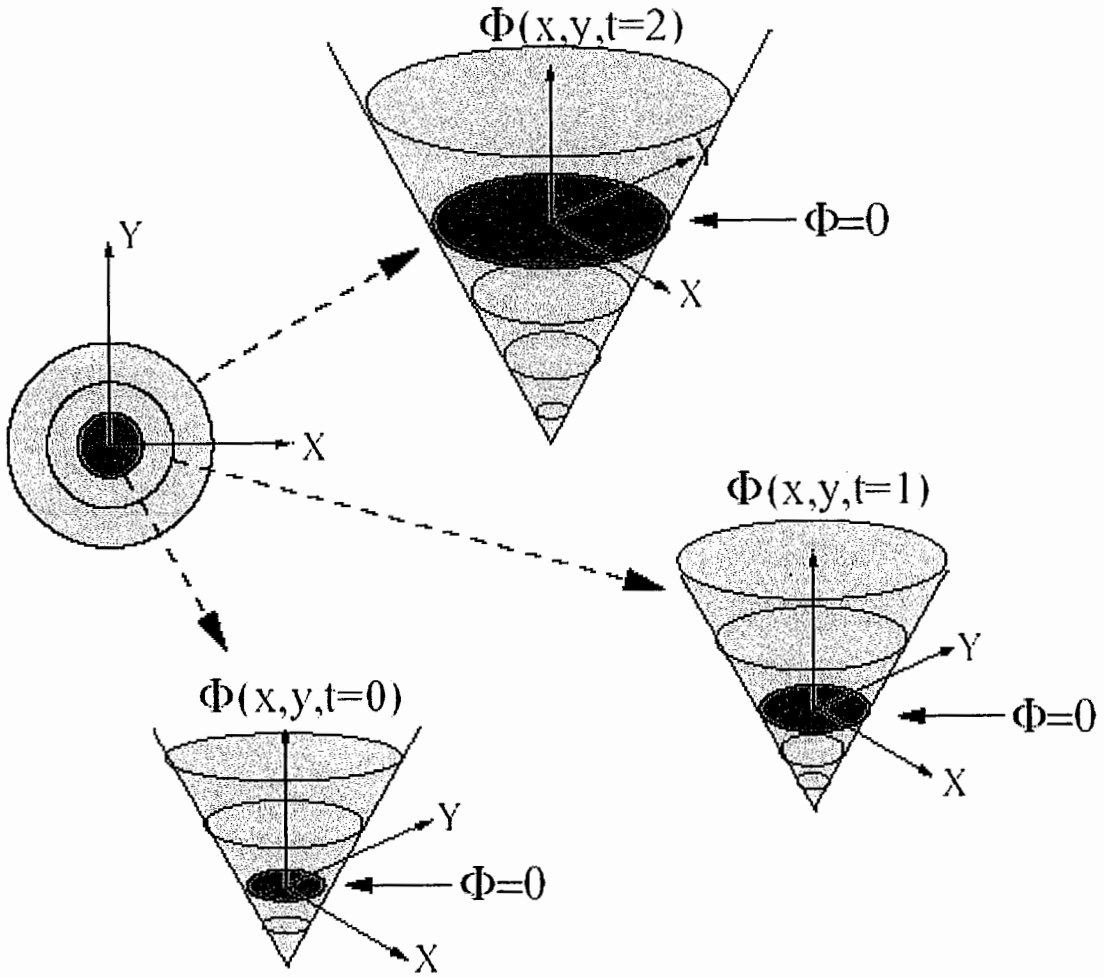


Figura 2.4: Evolução da interface ao longo do tempo.

$$\phi(x(t), t) = 0. \quad (2.3)$$

Usando a regra da cadeia, temos então que

$$\phi_t(x(t), t) + \nabla\phi(x(t), t) \cdot x'(t) = 0. \quad (2.4)$$

Supondo,

$$x'(t) \cdot n(x(t), t) = V_n(x(t), t), \quad (2.5)$$

então,

$$n(x(t), t) = \frac{\nabla\phi(x(t), t)}{\|\nabla\phi(x(t), t)\|} \quad (2.6)$$

e assim, a evolução de ϕ pode ser escrita como

$$\phi_t(x(t), t) + V_n(x(t), t) \|\nabla\phi(x(t), t)\| = 0. \quad (2.7)$$

2.6 Escolha da função de velocidade

A função de velocidade V_n depende de fatores relacionados às propriedades locais da curva, como curvatura, por exemplo, e de fatores relacionados às propriedades globais da curva, como forma e posição. Isto pode ser usado para controlar a curva de diversas maneiras. O método original de *level sets* propôs o uso de V_n como sendo a soma de dois termos

$$N_n = V_{n0} + V_{n1}(k) \quad (2.8)$$

onde V_{n0} é um termo constante de propagação e V_{n1} é uma função escalar sobre a curvatura k , que é dada por

$$k = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}\right) \quad (2.9)$$

O termo V_{n0} que é determinado por uma “*balloon force*” é independente da geometria da frente de propagação, a qual se movimentava uniformemente com velocidade V_{n0} , se contraindo ou se dilatando dependendo do sinal de V_{n0} [20].

Tomando como exemplo o caso em que o modelo dos *level sets* é usado para segmentação de imagens, é esperado que a curva cesse sua evolução se coincidir com a borda de um segmento. Isto pode ser realizado através da multiplicação do termo de velocidade por um termo dependente da imagem $g(x, y)$. Esse termo deve fazer a velocidade inversamente proporcional ao gradiente da imagem e pode ser definido da seguinte maneira:

$$g(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla I_\sigma(x, y)|^2}{\lambda^2}} \quad (2.10)$$

onde I_σ é a imagem I após um filtro Gaussiano definido por:

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x^2| + |y^2|}{2\sigma^2}\right) \quad (2.11)$$

A Equação 2.10 é uma das usadas por Perona e Malik em seu trabalho de suavização de imagens usando equação de difusão [21]. No trabalho original, este termo foi usado para parar o processo de difusão próximo às bordas de um segmento. Através de sutis alterações no valor de λ , nós podemos controlar a velocidade nas bordas dos segmentos de forma que ela tende a zero quando se aproxima das bordas. Com a inclusão desse termo no cálculo de V_n a equação de evolução da frente de propagação pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(x, y) \|\nabla \phi\| \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + V_n \right) \quad (2.12)$$

Modificações quanto ao termo de velocidade têm sido propostas por diversos autores. Por exemplo, Yezzi e seus colaboradores [22, 23] observaram que o termo de evolução dado pela Equação 2.10, em alguns casos, não faz a interface parar nas bordas. Eles propuseram então um termo adicional da forma $(\nabla g \cdot \nabla \phi)$ que faz com que a Equação 2.12 tome a seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(x, y) \|\nabla \phi\| \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + F_0 \right) + \nabla g \cdot \nabla \phi \quad (2.13)$$

Neste modelo, o termo adicional possui função dupla quando a curva está próxima à borda de um segmento. Ele tem o efeito de atrair a frente de propagação quando ela se aproxima de uma borda e de empurrá-la de volta se ela passar da borda. Note que com a adição do termo $(\nabla g \cdot \nabla \phi)$, a Equação 2.13 torna-se equivalente ao modelo de *snake* geodésica que foi proposto simultaneamente por Caselles et al [1] e Kichenassamy et al [22].

2.7 Inicializando a curva

O passo chave em ambas as abordagens, implícita ou paramétrica, é a escolha do local onde colocar a curva inicial. Considerando que o contorno pode se mover para fora ou para dentro, seu local inicial determinará a segmentação que será obtida. Por exemplo, se existe um único objeto na imagem e o contorno é colocado externamente a este e com movimentação para dentro, a segmentação encontrará a borda externa do objeto. Entretanto, se o objeto tem um furo no meio, não será possível obter a borda deste furo. Para isso, a curva inicial deveria ser colocada dentro do furo e propagada para fora (expandindo) ou posicionada dentro do segmento e suficientemente mais próxima da borda interna do que da externa. É importante lembrar que mais de uma curva pode ser usada como inicialização do level set.

Neste trabalho foram abordados dois métodos para inicialização do contorno. Para obter bordas externas de segmentos de interesse na imagem, foi considerado um contorno qualquer que envolva o segmento. Esta curva é então propagada de fora para dentro (contração). Para obter as bordas internas do segmento, nós iniciamos o algoritmo com um pequeno contorno circular contido na região delimitada pela borda externa do segmento e a fazemos expandir. Se o contorno inicial estiver contido no próprio segmento e este não for simplesmente conexo, mudanças topológicas devem acontecer durante a evolução da *snake*.

Estes dois tipos de inicialização de curva são suficientes para analisarmos o comportamento das *snakes* implícitas. Vale ressaltar que, para que a segmentação de determinadas imagens atinjam resultados satisfatórios, a inicialização do contorno próximo da borda almejada pode ser essencial.

2.8 Cálculo da função distância

Uma vez inicializado o contorno, é preciso calcular a função ϕ inicial que conforme foi visto, será uma distância com sinal a este contorno (ver Figura 2.5). O cálculo pode ser feito através da resolução da equação Eikonal [11, 24].

Suponha $V_n(x(t), t) > 0$. Como a frente de propagação se move para fora (expansão), uma maneira de se caracterizar a evolução da frente é calcular o tempo de chegada $T(x, y)$ onde a curva cruza o ponto (x, y) . Esta função de chegada está

7	6	5	4	4	4	3	2	1	1	1	2	3	4	5
6	5	4	3	3	3	2	1	0	0	0	1	2	3	4
5	4	3	2	2	2	1	0	-1	-1	-1	0	1	2	3
4	3	2	1	1	1	0	-1	-2	-2	-2	-1	0	1	2
3	2	1	0	0	0	-1	-2	-3	-3	-2	-1	0	1	2
2	1	0	-1	-1	-1	-2	-3	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	1	0	-1	-2	-2	-3	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	1	0	-1	-2	-2	-2	-2	-1	0	1	2	3	4	5
3	2	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	2	3	4	5
4	3	2	1	0	0	0	0	-1	-1	0	1	2	3	4
5	4	3	2	1	1	1	1	0	0	1	2	3	4	5
6	5	4	3	2	2	2	2	1	1	2	3	4	5	6

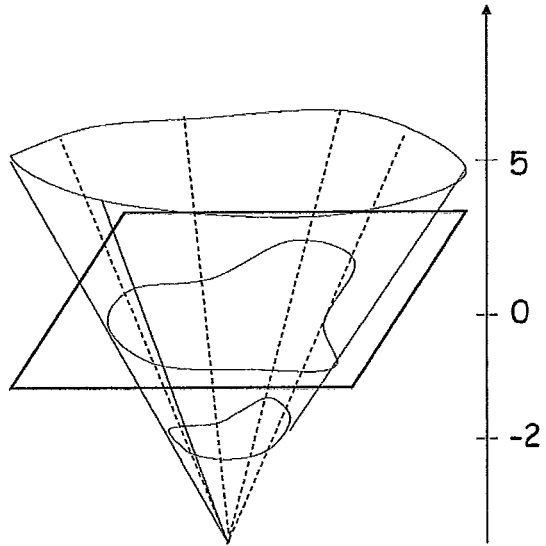


Figura 2.5: Representação gráfica da evolução de uma curva e os valores da função na grade.

relacionada com V_n através da equação

$$\| \nabla T \| V_n = 1, \quad (2.14)$$

e o contorno inicial é, logicamente, o lugar geométrico dos pontos onde T é nula. Quando a velocidade V_n depende somente da posição, a Equação 2.14 é referida como a equação Eikonal. A solução desta equação para uma velocidade constante unitária dá para cada instante t a função distância com sinal à curva de nível zero de t . O sinal de V_n depende da localização do pixel em relação ao contorno. Neste trabalho, foi usado sinal negativo para pixels internos ao contorno e positivo para os externos. Uma maneira eficiente para resolver a equação Eikonal é descrita em [25].

Com a evolução da frente de propagação, a função ϕ poderia, em princípio, ser atualizada apenas em uma vizinhança do contorno atual, dado que isto seria suficiente para determinar a evolução da curva. Entretanto, ao fazer isso a função ϕ deixaria de ser uma distância e, além disso, poderíamos não mais poder fazer a atualização correta dessa função, dado que partiríamos de valores incorretos.

Como resultado disto, a curva pode parar sua evolução próximo a uma borda sem atingí-la. Uma solução para este problema é reinicializar a função distância ϕ

periodicamente. Nós usamos a mesma equação Eikonal para esta finalidade. Entretanto, deve ser notado que isto pode adicionar um significativo custo computacional ao método level set se for feito freqüentemente.

2.9 Vantagens do Level Set

Existem algumas vantagens associadas à perspectiva de propagação da frente de onda utilizando o método dos *level sets*. Abaixo estão algumas.

- O método é diretamente aplicável a dimensões superiores.
- Alterações topológicas como divisão ou junção são manipuladas naturalmente. Em qualquer momento a borda é dada pelo nível zero da função, ou seja, a posição da frente no instante de tempo t é dado pelo conjunto solução de $\phi(x, y, t) = 0$.
- Propriedades geométricas são facilmente determinadas. Por exemplo, em qualquer ponto da frente de propagação o vetor normal é dado por

$$n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \tag{2.15}$$

e a curvatura é dada pelo cálculo do divergente do vetor normal, isto é:

$$k = \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} = \frac{\phi_{xx}\phi_y^2 - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_{yy}\phi_x^2}{(\phi_x^2 + \phi_y^2)^{3/2}} \tag{2.16}$$

- O método permite tratar apropriadamente os cantos da frente, dada uma adequada escolha de parâmetros e modelos.
- Controle de resolução através de parâmetros como Δh (espaçamento entre as células da grade) e Δt (passo de tempo)

2.10 Complexidade

Uma maneira interessante de se calcular o custo e a eficiência de um algoritmo é analisar sua complexidade teórica [26]. Para resolver um problema de fazer evoluir uma curva de nível num espaço de dimensão 2 discretizado em uma grade $n \times n$ pelo método dos *level sets*, são necessárias $O(n^2)$ operações por passo de tempo. A versão tridimensional do problema custará $O(n^3)$ [27, 7].

Algumas técnicas foram propostas visando diminuir o custo computacional relacionado ao cálculo da função ϕ . Métodos do tipo *Narrow Band* restringem a região de atualização da função ϕ às áreas próximas à interface. Já os métodos do tipo *Fast Marching* oferecem ganho de performance quando a evolução se restringe a somente uma direção [27].

2.11 Aplicações

Desde sua proposta original o método de *level sets* tem ganho grande popularidade, sendo usado nas mais diversas aplicações. Nesta seção estão relatadas algumas das áreas e aplicações desenvolvidas utilizando a abordagem *level set*.

Na área de *motion tracking*, por exemplo, onde as questões usuais estão em estimar o campo de movimento e segmentar as regiões onde ele é uniforme ou atende a alguma relação, alguns autores fazem uso dos modelos de *level sets* para a segmentação em função do movimento. Mansouri e Konrad, por exemplo, propuseram uma abordagem interativa para unir estimação do campo de movimento e segmentação baseada em *level sets* [28]. Seu algoritmo para segmentação é puramente baseado no movimento, diferentemente da abordagem feita por Paragios e Deriche [29], onde explicitamente há combinação de segmentação em função do movimento e da intensidade da imagem, causando a dependência das bordas estarem bem definidas. A metodologia proposta por Mansouri e Konrad apresenta um algoritmo baseado somente no movimento das imagens, sendo efetiva mesmo quando as bordas não estão bem definidas [30, 31].

Ainda em *motion tracking*, Catte, Dibos e Koepfler apresentaram um esquema para segmentação de movimento via cálculo de curvatura, que conjuga a utilização dos *level sets* e de morfologia matemática [18, 32].

Seguindo uma tendência dos últimos anos e visando um ganho de performance, iniciou-se a implementação dos modelos de *level sets* em placas gráficas. Um dos pioneiros foi o trabalho de Lefohn et al em 2003 [33]. Seu artigo aborda os problemas relacionados a segmentação tridimensional, focando no alto custo computacional e na dificuldade de parametrização. Os autores propõem o uso das placas gráficas para aceleração do processo de cálculo da superfície de evolução e da visualização dos resultados. Segundo os autores, suas principais contribuições são um sistema integrado capaz de fornecer controle interativo sobre o processo de segmentação e visualização, uma solução em GPU cerca de 15 vezes mais rápida do que os métodos anteriores, um novo e eficiente esquema de troca de mensagens entre GPU e CPU e a visualização tridimensional dos resultados em tempo real.

Além das já citadas, inúmeras outras áreas agregam as funcionalidades dos modelos *level sets*, tais como os trabalhos em geometria apresentados por Chopp e Sethian [14, 34], em geração de grades [19], em pesquisas sobre mecânica dos fluidos [35] e combustão [36], fabricação de dispositivos eletrônicos [37, 38], *morphing* [39, 40], visão estéreo [41], *shape from shading* [42], segmentação de imagens coloridas [43], cálculo do caminho mais curto [42] e classificação de imagens [44], entre outras.

Outro ramo da área de processamento de imagens onde se faz grande uso da abordagem *level set* é a segmentação de imagens médicas. Este assunto, entretanto, será abordado como mais detalhes nos capítulos 3 e 4.

Capítulo 3

Contornos Ativos

A maioria das estratégias usadas em contornos ativos visa minimizar um funcional de energia composto de um termo que é baseado na imagem e um outro termo relacionado com a energia interna ou modelo do contorno, o qual penaliza a falta de suavidade da curva. Os dois modelos principais são os paramétrico e o implícito, sendo este último implementado sob a formulação dos *level sets*.

Neste capítulo nos dedicaremos aos contornos ativos implícitos e às suas aplicações quanto à segmentação de imagens médicas. Serão abordadas algumas das metodologias propostas e suas variações, bem como algumas vantagens e desvantagens.

Antes de falarmos sobre os contornos ativos implícitos, cabe uma breve descrição sobre o modelo das *snakes* paramétricas.

3.1 Snakes

O método foi proposto originalmente por Kass, Witkin e Terzopoulos [45]. Os autores apresentaram um modelo de contorno definido no domínio da imagem, que pode se deslocar sob a influência de forças internas (definidas em função do próprio contorno) e externas, calculadas a partir de informações extraídas da imagem. As informações inerentes ao contorno devem manter sua suavidade durante sua deformação, enquanto que as informações vindas da imagem devem fazer o contorno se mover em direção às fronteiras da região que se deseja.

Segundo McInerney e Terzopoulos [46] as *snakes* são fruto da confluência da geometria, da física e da teoria da aproximação. Elementos geométricos são usados

para expressar a forma do objeto, a física impõe restrições à variação da forma ao longo do espaço e do tempo, e a teoria da aproximação permite formalizar os mecanismos que possibilitam o ajuste dos modelos aos dados.

Uma *snake* pode ser definida parametricamente da seguinte forma:

$$c(s) = (x(s), y(s)) \quad (3.1)$$

onde $x(s)$ e $y(s)$ são as coordenadas x e y ao longo do contorno, e o parâmetro $s \in [0, 1]$. O funcional de energia que deve ser minimizado pode ser escrito como:

$$E_{snake} = \int_0^1 E_{int}(c(s)) + E_{imagem}(c(s)) + E_{artificial}(c(s)) ds \quad (3.2)$$

em que E_{int} , E_{imagem} e $E_{artificial}$ representam a energia interna, as forças inerentes a imagem e a energia artificial inserida no modelo, respectivamente.

A energia interna da *snake* pode ser expressa como:

$$E_{int} = \alpha(s) \left| \frac{dv}{ds} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{d^2v}{ds^2} \right|^2 \quad (3.3)$$

onde $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ representam a elasticidade e a rigidez do contorno. Enquanto que o primeiro termo representa uma resistência a tração ou compressão - variação da extensão - o segundo representa uma resistência a dobra - variação da curvatura.

O segundo termo da Equação 3.2 é obtido a partir da imagem e pode se constituir numa combinação complexa de funcionais de forma que a sua minimização atraia a *snake* para características de interesse na imagem. Como exemplo, se $f(x)$ for o nível de tons de cinza da imagem em (x, y) , o funcional correspondente a uma *snake* que é atraída por contornos com gradientes de imagem elevados pode ser:

$$E_{imagem} = -|\nabla f(x, y)|^2 \quad (3.4)$$

O terceiro termo é referente às componentes que não dependem nem da forma atual do contorno nem da imagem, mas que são introduzidas ou diretamente pela ação do usuário ou por um processo automático que pode levar em conta a situação

em iterações anteriores. Por exemplo, se a *snake* estiver detida em em uma zona correspondente a um mínimo local de energia, o usuário poderá forçá-la a continuar sua evolução. Esta mesma ação poderia ser decidida de forma automática, se um *snaxel* permanecesse fixo, por várias iterações, em um pixel onde o contraste é baixo.

De acordo com a condição de Euler-Lagrange, a *snake* $c(s)$ que minimiza E_{snake} deve satisfazer:

$$\frac{d^2}{ds^2}E_{c_{ss}} - \frac{d}{ds}E_{c_s} + E_c = 0 \quad (3.5)$$

em que E_c , E_{c_s} e $E_{c_{ss}}$ são, respectivamente, as derivadas parciais de E em relação à c , $\frac{dc}{ds}$ e $\frac{d^2s}{ds^2}$.

Apesar de serem muito utilizadas em imagens médicas, as *snakes* originais apresentam limitações, tais como a necessidade da inicialização próxima do alvo, a inflexibilidade dos parâmetros - que não são ajustados ao longo da evolução - e a impossibilidade de alterações topológicas. De fato, a inicialização das *snakes* é crítica. Frequentemente a curva inicial tem que ser relativamente próxima do contorno a segmentar para que o processo seja bem sucedido. Isto se deve à presença de características específicas na imagem que, não pertencendo ao contorno do objeto, podem então, forçar a *snake* a convergir para um mínimo local de energia indesejado. Além disso, a parametrização fixa das *snakes* torna difícil que ela assuma formas tubulares ou com concavidades e protuberâncias acentuadas. Finalmente, a topologia do objeto de interesse tem que ser conhecida de início, pois as *snakes* são incapazes de manipular transformações topológicas sem mecanismos adicionais.

3.2 T-Snakes

Com o objetivo de desenvolver uma estrutura unificada que permitisse ultrapassar a limitação de invariância topológica das *snakes* comuns mantendo, contudo, sua potencialidade, McInerney e Terzopoulos propuseram as *T-snakes* (*topological adaptable snakes*). Esta variante dos modelos paramétricos inclui a capacidade de re-parametrização que permite modificar a sua topologia.

Em sua abordagem é utilizada uma malha triangular que particiona o domínio da imagem. A cada iteração a *snake* é reparametrizada, sendo os *snaxels* posicionados

em suas intersecções com as arestas da malha. A reparametrização visa fazer com que a curva não tenha mais de uma auto-intersecção por célula. O esquema permite aos contornos evoluírem de forma a se ajustarem a geometrias complexas, podendo também alterar sua topologia. A mudança topológica é possível porque a T-Snake é considerada uma aproximação de uma curva de nível. Especificamente a curva de nível $1/2$ da extensão por interpolação linear em cada triângulo da malha da função característica do conjunto de vértices que já foram atingidos - ou “queimados” - pela T-Snake desde o início da sua evolução.

Quando uma *T-snake* colide com ela própria, se divide em duas ou mais partes. Quando ela colide com outra, as duas se agregam para formar uma nova T-Snake - operação *merge*.

Em continuidade ao trabalho de McInerney e Terzopoulos, A. Oliveira e seus colaboradores apresentaram uma abordagem para controle da topologia de uma *T-Snake*, chamada *Loop-Snake* [47, 48]. Sua metodologia foca os laços (*loops*) formados pela curva obtida a cada estágio de evolução. Além disso, faz uso de uma estrutura adicional conhecida como *loop-tree* para decidir em tempo $O(1)$ quando a região envolta pelo laço já foi explorada pela *snake*.

3.3 Variantes dos Modelos Implícitos

Os modelos de *level sets* podem ser divididos em duas classes principais [24] (ver Figura 3.1). A primeira delas abrange os modelos sem regularizadores, isto é, aqueles em que a força de propagação é obtida, principalmente, a partir da curvatura, do gradiente da imagem e do valor da função. A segunda classe é composta pelos modelos que fazem uso dos regularizadores. Isto é, derivam a força de propagação usando abordagens estatísticas semelhantes as usadas pelos métodos baseados em regiões, que tomam informações estatísticas da região para controlar a evolução da curva. Esta classe de modelos deformáveis pode ainda ser dividida em outras quatro subclasses: os modelos em que a força de propagação é derivada de esquemas de clusterização; modelos derivados de métodos estatísticos baseados em redes Bayesianas; modelos derivados de informações da forma da superfície; modelos derivados de informações baseadas na classificação dos pixels.

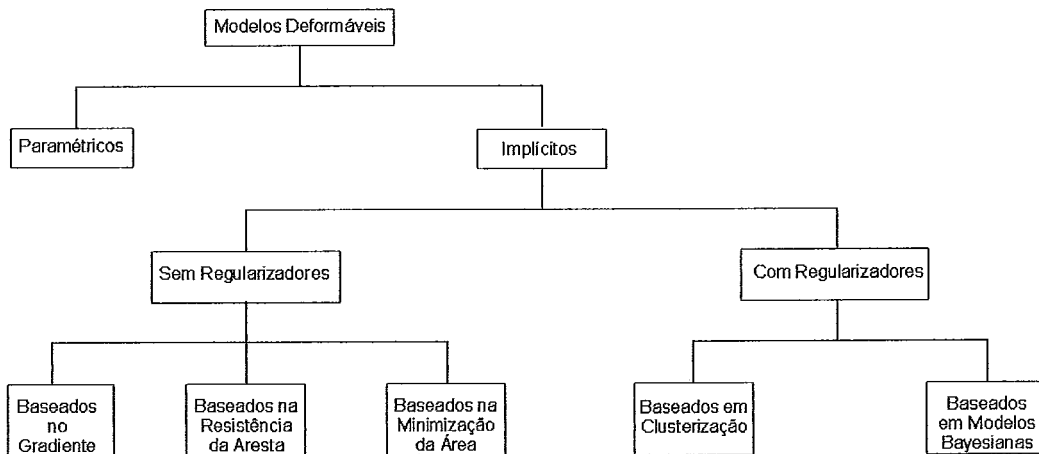


Figura 3.1: Classificação dos modelos deformáveis.

3.4 Level Sets sem Regularizadores

Nestes modelos, a acuracidade da segmentação é altamente dependente dos valores de gradiente da imagem e do quão perto a curva de inicialização está da borda.

3.4.1 Com critério de parada baseado no gradiente

Baseados na abordagem proposta por Osher e Sethian [7], Caselles *et al* [49] e Malladi *et al* [20] apresentaram um modelo de contornos ativos geométrico derivado da seguinte equação :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \underbrace{g(x, y)}_{\text{termo de parada}} (k + \alpha) |\nabla \phi|, \quad (3.6)$$

onde k é a curvatura, α uma constante e $g(x, y)$ é o termo de parada baseado no gradiente da imagem, que é dado por

$$g(x, y) = \frac{1}{1 + |\nabla [G_\sigma(x, y) * I(x, y)]|}. \quad (3.7)$$

Perceba que a Equação 3.6 é descrita por Malladi *et al* em [50], de onde pode-se deduzir o termo de parada como

$$g(x, y) = e^{\alpha |\nabla [G_\sigma(x, y) * I(x, y)]|}, \quad (3.8)$$

onde α é uma constante relacionada ao gradiente e $|\nabla[G_\sigma(x, y) * I(x, y)]|$ é o gradiente da imagem após um filtro Gaussiano com desvio padrão σ .

O termo de parada apresentado não é robusto quando o gradiente não é bem definido e pode não conter a evolução da curva na borda desejada.

3.4.2 Com critério de parada baseado na resistência da aresta

Kichenassamy *et al* [51] e Yezzi *et al* [23] apresentaram uma proposta para resolver o problema de bordas fracas encontrado no modelo proposto por Caselles *et al* [49] e Malladi *et al* [20]. Eles introduziram um termo adicional, chamado de termo de tração - *pull back term*. Este termo pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(x, y)(k + \alpha) |\nabla \phi| + \underbrace{(\nabla g \cdot \nabla \phi)}_{\text{termo de parada}}, \quad (3.9)$$

Note que $(\nabla g \cdot \nabla \phi)$ denota uma força de atração em direção à normal da curva. Esta força é obtida do gradiente de um campo potencial de g . Este campo potencial g pode ser escrito na forma

$$g(x, y) = -|\nabla G_\sigma * I(x, y)|. \quad (3.10)$$

Perceba que a Equação 3.9 é discutida por Malladi *et al* em [50]. Assim, reescrevendo-a segundo Malladi *et al*, temos

$$\phi_t + g(x, y)(\epsilon k + \alpha) |\nabla \phi| - \beta(\nabla g \cdot \nabla \phi) = 0, \quad (3.11)$$

onde β é uma constante de força da aresta, α é uma constante que foi usada com valor 1 por Malladi *et al*, k é a curvatura, ϵ é um termo de controle constante dependente da curvatura, e $(\nabla g \cdot \nabla \phi)$ tem a mesma definição dada anteriormente.

Mesmo sendo uma proposta para os casos onde as bordas não são bem definidas, segundo Siddiqui *et al* [52], este modelo não conteve a evolução da curva em estruturas complexas.

3.4.3 Com critério de parada baseado na minimização da área

Siddiqui *et al* em [52] propôs a adição de um termo extra ao modelo proposto por Kichenassamy [51] *et al* e Yezzi *et al* [23].

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(x, y)(k + \alpha) |\nabla \phi| + (\nabla g \cdot \nabla \phi) + \underbrace{\frac{\alpha}{2} |\nabla g| |\nabla \phi|}_{\text{termo de parada}}, \quad (3.12)$$

onde $\frac{\alpha}{2}(\nabla g) |\nabla \phi|$ é o termo de minimização de área. Este termo atua como uma força adicional que atrai a frente de propagação quando ela está na vizinhança de uma aresta.

Comparada aos dois modelos apresentados anteriormente em [24], esta abordagem se mostrou mais eficiente. Entretanto, este método não é robusto quando aplicado a segmentação de estruturas complexas como córtex cerebral [50, 53].

3.5 Level Sets com Regularizadores

A adição de informações estatísticas aos contornos ativos tem despertado grande interesse em pesquisas sobre segmentação de imagens médicas (veja [54, 55, 56]). A principal razão para isto é o fato do método tomar vantagens ao computar informações locais e globais em relação à região onde a curva está evoluindo. Estas informações auxiliam na movimentação da curva, empurrando ou atraindo a frente de propagação segundo as características da região.

3.5.1 Baseados em Clusterização

A introdução de uma força relacionada a região tem por objetivo regularizar o resultado final tomando como base informações conhecidas sobre o objeto a ser segmentado. Por exemplo, se essas informações se constituem num conjunto de pixels que caracterizam tanto o objeto quanto as demais áreas da imagem - *background*, podemos computar uma função de pertinência em relação ao objeto usando o procedimento mostrado por Suri em [24].

Tendo essa função de pertinência para o objeto e o *background*, podemos definir a força de região a ser aplicada a um *snaixel*_{*i,j*} como sendo $f(x_B^{i,j}) - f(x_O^{i,j})$, onde f é uma função real crescente.

3.5.2 Baseados em Modelos Bayesianos

Quando conhecemos dados estatísticos relacionados ao objeto e ao *background* como a média e a variância dos pixels em uma amostra padrão de cada um deles, podemos definir uma função de verossimilhança de uma janela J em torno de cada pixel p da curva de nível zero corrente, e uma janela de mesmas dimensões centrada em um ponto da fronteira objeto/*background* da seguinte maneira:

$$pob(p) = \prod_{p_1 \in J \mid \phi(p_1) > 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_B} e^{-\frac{(I(p_1) - \mu_B)^2}{\sigma_B^2}} \cdot \prod_{p_2 \in J \mid \phi(p_2) < 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_O} e^{-\frac{(I(p_2) - \mu_O)^2}{\sigma_O^2}}, \quad (3.13)$$

onde AO e AB são as áreas, μ_O e μ_B são os valores de média, σ_O^2 e σ_B^2 são os desvios padrões de AO e AB , p_1 e p_2 as intensidades dos pixels, todos eles do objeto e do *background*, respectivamente.

O termo acima pode ser pensado como a conjugação de mensagens que os nós de uma rede Bayesiana que representam evidências da forma “ $p_1 \in Background$ ” ou “ $p_2 \in Objeto$ ” passam para o nó p - centro da janela - que está na borda do objeto.

Adicionando na equação de evolução da curva um termo proporcional ao módulo do gradiente dessa medida de verossimilhança, favorecemos a condição de que a curva de nível zero deve convergir para uma situação em que a vizinhança de qualquer um de seus pontos seja similar ao padrão dado.

Outras formas de definir um termo adicional - genericamente chamado de força de região - que é computado a partir de um modelo Bayesiano são apresentadas em [24, 55].

No primeiro trabalho - [24] - a força de região toma a forma

$$V_0 = -sgn\{\alpha_{int}^p p_{int}(p) - (1 - \alpha_{int}^p) p_{ext}(p)\}, \quad (3.14)$$

onde p_{int}^p e p_{ext}^p são as propabilidades computados a priori de um pixel, pertencendo, respectivamente, ao interior e ao exterior de um objeto, ter intensidade p . α_{int} ,

que também é computado a priori, é a probabilidade de um pixel de intensidade p pertencer ao interior do objeto.

Se o primeiro termo da expressão acima for maior do que o subtraendo, um pixel p com intensidade $I(p)$ deve estar no interior do objeto que idealmente deve corresponder a região onde $\phi < 0$. Então, se p está sobre a curva de nível zero de ϕ , devemos fazer $\frac{\partial\phi}{\partial t}(p) < 0$. Analogamente, se é mais provável que um pixel com intensidade $I(p)$ pertença ao *background*, mas p se encontra sobre a curva $\{x|\phi(x) = 0\}$, devemos ter $\frac{\partial\phi}{\partial t}(p) > 0$.

No trabalho de Leventon [55], a força de região tem a forma

$$\alpha \left(\phi^*(t) - \phi(t) \right), \tag{3.15}$$

onde ϕ^* representa a definição de ϕ que é mais provável, segundo uma probabilidade a posteriori expressa por:

$$\frac{P(\phi|\alpha, \beta) P(\nabla I|\alpha, \beta, \phi) P(\alpha)P(\beta)}{P(\phi|\nabla I)}, \tag{3.16}$$

onde α é uma representação da forma do objeto a ser segmentado e β define a posição e orientação desse objeto na imagem. A introdução desse termo faz com que $\phi(t + 1)$ esteja mais próxima de $\phi^*(t)$ do que $\phi(t)$.

Capítulo 4

Segmentação de Ultra-sonografias

Ultra-sonografia é um método não invasivo frequentemente utilizado no auxílio a diagnósticos, sendo capaz de fornecer informações importantes sobre a região de interesse. Ela combina baixo custo, tempo de aquisição das imagens reduzido, além da abstenção da radiação. Apesar destes benefícios, as ultra-sonografias possuem eco-perturbações e ruídos localmente distribuídos, fatores que podem causar dificuldades na análise e no diagnóstico. A interpretação do que é a fronteira da região de interesse torna-se relativamente subjetiva. Assim, a implementação de uma metodologia capaz de realizar a segmentação de maneira eficiente e confiável torna-se uma tarefa complicada.

Um dos principais problemas encontrados na segmentação de ultra-sonografias está relacionado à qualidade das bordas da região de interesse. Bordas ruidosas - mal definidas ou descontínuas - podem causar resultados inválidos. Veja o exemplo da Figura 4.1, no qual um contorno expande em direção à borda de um tumor representado graficamente em uma ultra-sonografia. Neste exemplo, a região de interesse é a área escura central na imagem. O contorno é inicializado dentro desta região e deve se expandir até encontrar a borda da região. Como resultado do baixo gradiente na parte superior esquerda da fronteira da região, a evolução da curva não foi detida pela fronteira, o que causou um erro na segmentação.

Inúmeros trabalhos têm sido propostos apresentando soluções para o problema de bordas mal definidas. Alguns deles adicionam critérios de parada para todo o contorno [52, 57], outros, para oferecer maior robustez à solução, consideram além do gradiente, informações adicionais, como a geometria da região [54, 58]. Outros

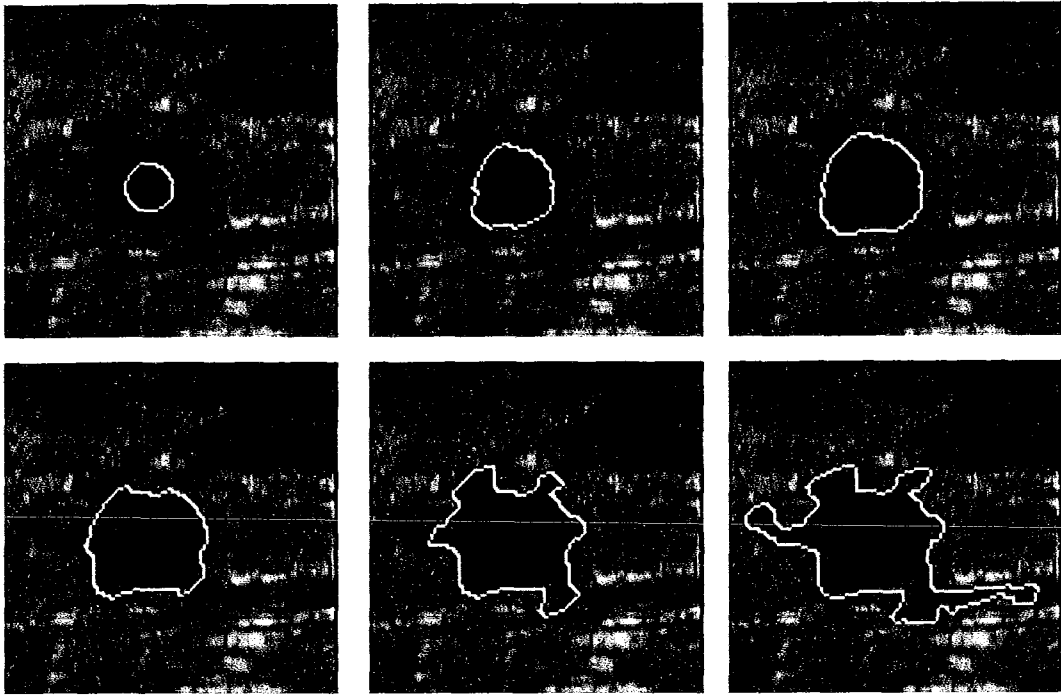


Figura 4.1: Exemplo em que a curva ultrapassa a borda da região de interesse.

autores propõem a remoção do termo de expansão - *balloon force* - considerando uma inicialização da curva próxima à borda de interesse [59].

Dentre tantos, destacamos a exposição de dois trabalhos: a formulação proposta por Yong Yang em [3]; e a abordagem feita por Mora em [2].

4.1 Classificação por nível de intensidades

Yong Yang, C. Zheng e X. Yan [3] propõem uma nova função de velocidade para o modelo de level set. Essa nova função é baseada nas informações de intensidade dos pixels da região de interesse, que substituem dentro do modelo de *level set* as informações de gradiente da imagem. A idéia principal é definir critérios baseados nos valores de intensidade que permitem identificar a região de interesse. O termo de propagação do modelo é ponderado em função da distância entre a intensidade de um ponto e a faixa de valores admitida para que ele seja classificado como pertencente a região de interesse. Com o método *level set*, mantem-se a suavidade da superfície envolvente, pode-se prevenir possíveis ultrapassagens da frente de propagação em relação à borda de interesse, o que é comum em algoritmos que fazem o crescimento de regiões.

De maneira geral, a idéia por trás deste tipo de algoritmo é implantar uma semente dentro da região de interesse (tipicamente um ou mais pixels) e avaliar seus pixels vizinhos para determinar se eles devem ser considerados pertencentes ou não à região. Caso a avaliação retorne como verdadeira, o novo pixel será agregado à região em crescimento. Os algoritmos de crescimento de regiões variam dependendo do critério usado para decidir se o pixel pertence ou não à região, o tipo de conectividade empregada, e a metodologia usada para escolher entre os pixels que são vizinhos aos já classificados, aquele ser processado.

Os autores defendem essa idéia alegando que, em imagens médicas, nos segmentos que representam órgãos, a intensidade dos pixels varia suavemente, já que as informações de gradiente não são suficientes para delimitar as regiões de interesse em alguns tipos de imagens. Justificam assim, a adição de informações sobre a região para a obtenção de segmentação mais robusta.

O modelo específico empregado por eles pode ser escrito como:

$$F = g(I)(1 - \varepsilon k) = (|I(X) - I_{mean}|^2 + 1)(1 - \varepsilon k) \quad (4.1)$$

em que $I(X)$ é o valor pré-estabelecido para a intensidade média da imagem do órgão e I_{mean} é a intensidade média dos pixels presentemente classificados como pertencentes ao órgão. A influência da curvatura k é ponderado por ε , mas, também é afetada por $I(X) - I_{mean}$.

4.2 Classificação baseada na variância da intensidade dos pixels

Mora et al [2] propõem um modelo de *level set* robusto para detecção de cavidades cardíacas em imagens de ultra-som. Seu método é uma variação do modelo original, já que incrementa adaptações às imagens infectadas por ruídos multiplicativos, também chamados de “*speckles*”.

Para a detecção de bordas, seu algoritmo faz uso de um coeficiente de variação de intensidade da imagem, definido por:

$$\xi^2 = \frac{\text{var}(I)}{\bar{I}^2} \quad (4.2)$$

onde $\text{var}(I)$ é a variância da intensidade da imagem e \bar{I} é a média. Uma versão local para este coeficiente pode ser descrita da seguinte forma:

$$\gamma^2(s) = \frac{1}{|\eta_s|} \sum_{p \in \eta_s} \frac{(I_p - \bar{I}_s)^2}{\bar{I}_s^2} \quad (4.3)$$

onde η_s é uma vizinhança de s e \bar{I} é a média da intensidade em η_s .

Uma imagem afetada por *speckle* pode ser expressa como $I_{i,j} = R_{i,j} * n_{i,j}$ em que R é a reflectividade do ponto imageado no pixel (i, j) e $n_{i,j}$ é a contribuição do ruído *speckle* neste pixel. Em uma área Ω com N elementos onde se assume que a reflectividade é uma constante λ , a Equação 4.3 pode ser reescrita como:

$$\xi^2 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i,j \in \Omega} (\lambda n_{i,j} - \lambda \bar{n})^2}{(\lambda \bar{n})^2} = \frac{\text{var}(n)}{\bar{n}^2} \quad (4.4)$$

Em 4.4, o coeficiente de variação depende somente do ruído multiplicativo, desligando-se da reflectividade.

Lembrando que a variância de A pode ser escrita como

$$\text{var}(A) = E(A^2) - E(A)^2, \quad (4.5)$$

pode-se escrever 4.2 como

$$\frac{\text{var}(Rn)}{E(Rn)^2} = \frac{1}{E(Rn)^2} [E((Rn)^2) - E(Rn)^2] \quad (4.6)$$

Desenvolvendo a Equação 4.6 temos:

$$\frac{\text{var}(Rn)}{E(Rn)^2} = \underbrace{\frac{\text{var}(n)E(R)^2}{E(Rn)^2}}_{\text{Primeiro}} + \underbrace{\text{var}(R) \frac{\text{var}(n) + E(n)^2}{E(Rn)^2}}_{\text{Segundo}} \quad (4.7)$$

Analisando os termos da Equação 4.7 observamos que o primeiro termo é consideravelmente mais próximo do coeficiente de variação global (ξ) do que o valor de $\gamma^2(s)$ num ponto de uma borda, dado que numa vizinhança dele a variância $\text{var}(\lambda)$ é bem alta. Identificando o primeiro termo como o coeficiente global, podemos então dizer que $\gamma \approx \xi$ em áreas homogêneas e $\gamma \gg \xi$ nas bordas. Esta propriedade faz

do coeficiente de variação um bom detector de bordas para imagens afetadas por *speckle*.

Neste trabalho, os autores argumentam ainda sobre as desvantagens do método original, reafirmando a necessidade de seu algoritmo. A primeira delas é que a força que acarreta a evolução da curva nunca é exatamente zero numa borda e assim ela pode atravessar a borda do objeto. A segunda desvantagem que eles apontam é que fazer a segmentação por um método que considera o gradiente não é adequado na presença de ruídos *speckle*.

Desta forma, eles propõem que a força a ser aplicada a um ponto da curva seja dada por:

$$g(\gamma)_{i,j} = \begin{cases} [1 - \frac{\gamma_{i,j}^2}{\gamma_s^2}]^2 & \text{if } \gamma_{i,j} \leq \gamma_s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.8)$$

em que $\gamma_{i,j}$ é o CV local e γ_s é um parâmetro escalar baseado no CV global. As bordas correspondem aos pixels nos quais os valores do CV local são maiores do que do CV global.

O termo descrito na Equação 4.8 tem duas propriedades interessantes: é exatamente igual a zero nas bordas e é robusto para imagens afetadas por *speckle*. Estas duas características oferecem, à abordagem, relevante interesse na área de segmentação de ultra-sonografias, onde o ruído *speckle* está presente.

Capítulo 5

Implementação

Como aplicação do estudo descrito nas seções anteriores foi desenvolvida uma ferramenta para segmentação de imagens. Visou-se especialmente a praticidade e a possibilidade do usuário interagir com o processo de segmentação e poder visualizar seus resultados. Para efeito de comparação foram também implementadas algumas metodologias empregando *level sets*.

Neste capítulo serão descritos os passos seguidos para a implementação dos algoritmos de segmentação e para o desenvolvimento da interface gráfica.

5.1 Algoritmos

Os algoritmos estudados no Capítulo 3 apresentam formulações matemáticas diferentes. Entretanto, no que tange ao seu fluxo de dados, eles possuem similaridades relevantes. Assim, tomando como exemplo os modelos propostos por Caselles [1] e Goldenberg [60], a metodologia utilizada para a sua implementação é a mesma. O que muda de um para o outro são os parâmetros e o arranjo dos operadores que compõem o modelo matemático empregado. As tarefas básicas, tais como criação da grade, cálculos de gradiente, da curvatura e do vetor normal, são comuns a ambas as técnicas.

Segundo o fluxograma apresentado na Figura 5.1, a implementação de todo o processo de segmentação através das *snakes* implícitas pode ser dividida em quatro partes principais: entrada e saída, criação de uma estrutura de dados associada aos vértices de uma grade regular, atualização dos componentes dessa estrutura e

traçado do contorno final.

5.1.1 Entrada e saída

Em relação a esta etapa, ressaltamos que a saída do processo é constituída pela sobreposição do contorno final na imagem de entrada e do armazenamento em disco dos pontos que descrevem este contorno.

5.1.2 Criação da estrutura de dados

Esta parte do processo é responsável por particionar a imagem em células. Segundo uma resolução pré-estabelecida, deverá ser criada uma grade composta de vértices e arestas. Cada célula desta grade é delimitada por quatro vértices, $v_{i,j}$, $v_{i,j+1}$, $v_{i+1,j}$ e $v_{i+1,j+1}$, e as arestas que os ligam entre si.

Quando as dimensões das células não são submúltiplos das dimensões correspondentes da imagem, a grade é posicionada de forma centralizada, isto é, de forma que as faixas da imagem, acima e abaixo ou a esquerda e a direita, da parte coberta por ela tenham a mesma largura. Neste caso, pode haver perda de informações nas proximidades das bordas da imagem, impedindo que o contorno alvo seja detectado nestas regiões. Como essas faixas são normalmente estreitas, isso não acontece na maioria dos casos.

Em seguida, é necessário calcular os valores iniciais de cada um dos atributos dos vértices, ou seja : valor da função ϕ , gradiente da intensidade da imagem, gradiente da função, curvatura e vetor normal. O valor inicial da função ϕ é pode ser dado pela distância Euclidiana entre o ponto atual e a borda da curva inicializada. O gradiente da imagem é dado por

$$g(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{|\nabla I_\sigma(x,y)|^2}{\lambda^2}} \quad (5.1)$$

onde I_σ é a imagem I após um filtro Gaussiano definido por

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{|x^2| + |y^2|}{2\sigma^2}\right), \quad (5.2)$$

o vetor normal é dado por

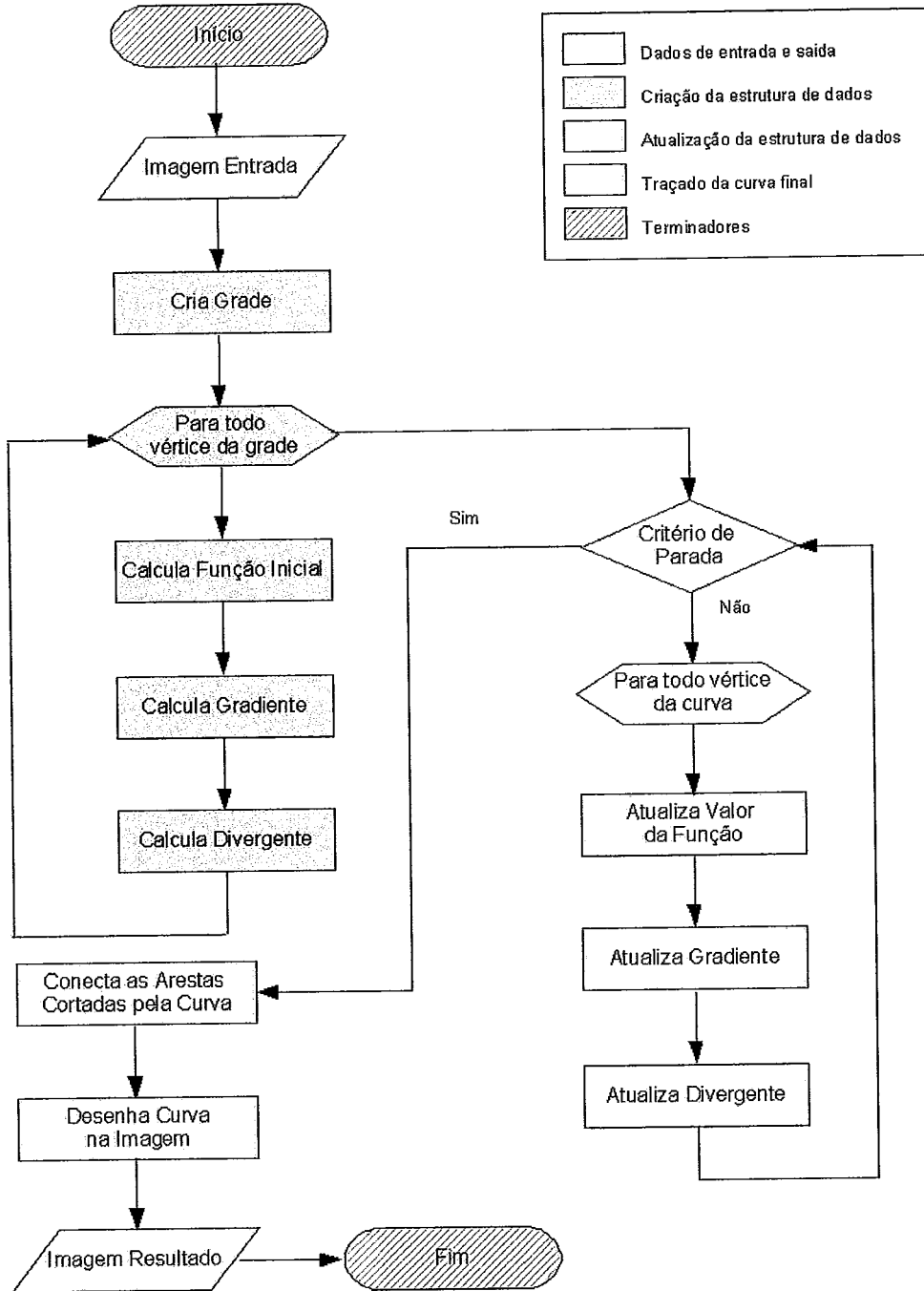


Figura 5.1: Fluxograma da implementação dos algoritmos de segmentação.

$$\vec{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}, \quad (5.3)$$

e a curvatura é dada pelo divergente do vetor normal

$$k = \text{div}\left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}\right). \quad (5.4)$$

5.1.3 Atualização da estrutura de dados

A atualização se restringe aos vértices que compõem uma vizinhança da curva atual, ou seja, o valor da função ϕ nos vértices afastados da curva de evolução não é alterado. A partir de então, repete-se o computo dos demais atributos dos vértices, considerando os valores atualizados de ϕ , até que um critério de parada seja satisfeito.

5.1.4 Obtenção da curva final

Neste momento, o algoritmo conecta as arestas que são cortadas pela curva sequencialmente. Agora, para cada uma destas arestas calcula-se o ponto exato de intersecção com a curva de evolução. Esta interpolação é dada por

$$\left(\phi_{v_f} * c_{x_{v_i}}\right) - \left(\phi_{v_i} - c_{x_{v_f}}\right) \quad (5.5)$$

para as arestas horizontais e por

$$\left(\phi_{v_f} * c_{y_{v_i}}\right) - \left(\phi_{v_i} - c_{y_{v_f}}\right) \quad (5.6)$$

para as arestas verticais, onde c_x e c_y são as coordenadas em x e y , e v_i e v_f são os vértices inicial e final de uma aresta, respectivamente.

Os pontos calculados são armazenados sequencialmente em uma lista e representam a curva resultante da segmentação. Uma função responsável por desenhar a curva receberá esta lista de pontos e a representará graficamente sobre a imagem de entrada.

5.2 Interface Gráfica

Na construção da interface gráfica do sistema implementado visou-se os dois seguintes objetivos:

1. Facilitar a entrada dos parâmetros(multiplicadores) gerais e específicos de determinados métodos. Entre os primeiros, temos os parâmetros de curvatura, gradiente, posição e tamanho da curva inicial, tipo de movimento da curva (contração ou expansão) e número de iterações. No segundo caso temos, por exemplo, o parâmetro α - que é específico do método apresentado por Caselles [1].
2. Possibilitar que se efetuem comparações entre os diferentes métodos, com comparação entre a curva obtida e uma outra introduzida manualmente.

A implementação da interface constituiu-se principalmente da construção de uma área de visualização para a imagem e um painel de configuração de parâmetros (veja Figura 5.2).

Na área de visualização é exibida a imagem de entrada e, após a segmentação, a imagem resultante com a curva final sobreposta. É nesta área, sobre a imagem de entrada, que deverá ser definida a curva inicial.

Já no painel, do lado direito da aplicação, é possível configurar a medida do raio da curva inicial - assumida circular, assim como se ela se movimentará para dentro ou para fora. É possível ainda pré-definir um número máximo de iterações para o algoritmo de segmentação, mesmo que este seja capaz de parar a evolução da curva por si só, e alguns parâmetros intrínsecos a cada modelo, como multiplicadores para a curvatura e o gradiente. Note que este painel é específico para cada modelo que é escolhido no menu *Methods*.

Entre as facilidades comuns às interfaces gráficas, estão uma área de menus e atalhos. No menu *File* estão as opções de abrir e salvar uma imagem nos formatos PNG, BMP e JPEG, salvar a curva como um arquivo de pontos e imprimir. No menu *Methods* estão as opções de métodos de segmentação: Caselles [1], Mora [2], Yang [3] e um método de segmentação por *thresholding*.

No menu *Tools* são oferecidas funcionalidades para configuração visual da curva - cores e espessura - e para execução do algoritmo de medida de erro entre duas

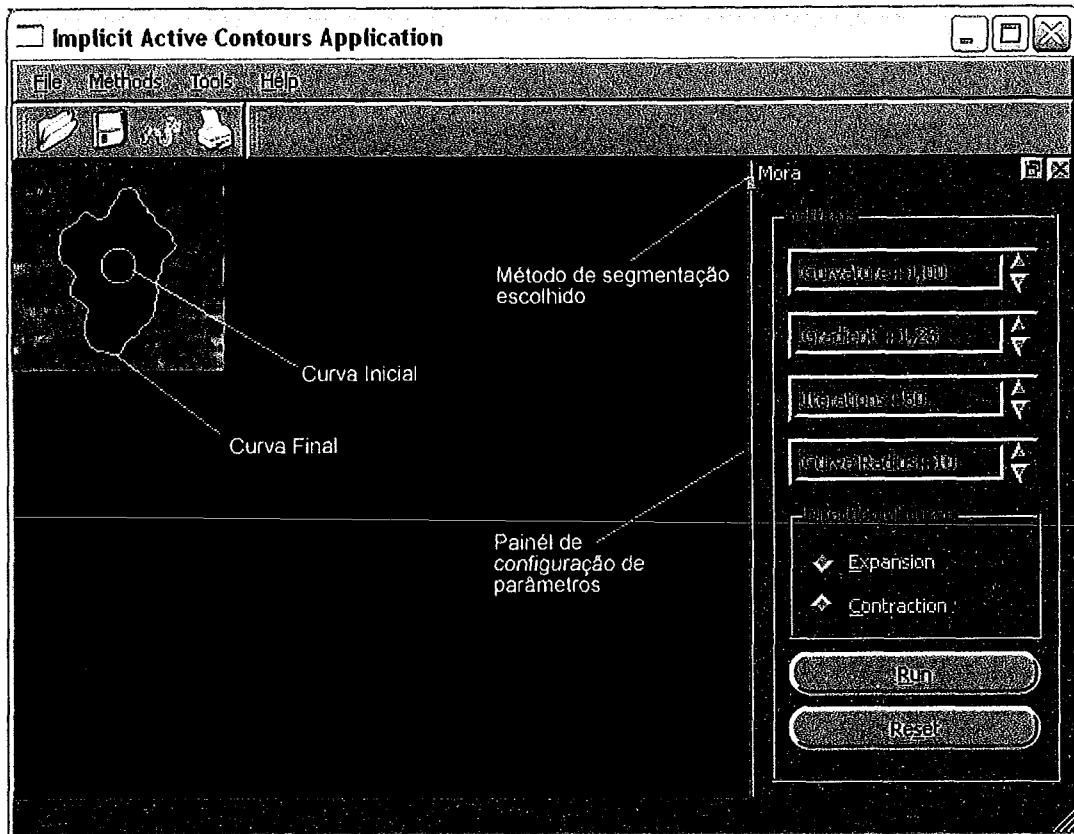


Figura 5.2: Interface gráfica para interação entre o usuário e os algoritmos de segmentação de imagens.

curvas - Polyline Distance Measure [61, 62, 24], descrito no Capítulo 6.

5.3 Ferramentas

A escolha das ferramentas utilizadas para implementação foi de fundamental importância. Primeiramente, para os algoritmos, visto que estes requerem alto custo computacional e qualquer acréscimo a este custo poderia depreciar a implementação. Em segundo lugar está a portabilidade. Considerando que este é um trabalho acadêmico, a possibilidade de utilização desta aplicação em diferentes sistemas operacionais atrai interesse sobre o projeto.

Desta forma, para a implementação dos algoritmos foi escolhida a linguagem C++, fazendo uso de seu paradigma de programação orientação a objetos e assim, agregando características interessantes à estrutura do código desenvolvido, tais como reusabilidade, facilidade de manutenção e menor complexidade de compreensão.

Uma outra vantagem de grande relevância é a sua comunicação nativa com os diversos sistemas operacionais existentes.

Para o desenvolvimento da interface gráfica foram tomadas as mesmas precauções quanto a escolha das ferramentas. Lembrando da importância da portabilidade do código, optou-se por uma biblioteca que é implementada em C++ e possui versões gratuitas para os mais utilizados sistemas operacionais, Windows, Linux, Mac, etc. Esta biblioteca é denominada Qt e é distribuída sob a política de licença baseada na GNU General Public License (GPL). Juntamente a ela usou-se a biblioteca gráfica OpenGL para a manipulação das imagens e das curvas.

Além destas, também foi utilizada a biblioteca ITK, aplicada no desenvolvimento dos algoritmos para processamento das imagens. Esta biblioteca também é gratuita, multi-plataforma e desenvolvida em C++, o que garante total integração com o sistema.

5.4 Download

Todo o código desenvolvido pode ser baixado a partir do endereço eletrônico www.lcg.ufrj.br/Members/diego.

Capítulo 6

Resultados

Os resultados apresentados neste trabalho foram computados em um PC equipado com um processador Intel Core 2 CPU 2.13 GHz e com 2GB de memória RAM. Os experimentos foram realizados sobre uma base de dados composta por cerca de 250 imagens de mamografias captadas por ultra-sonografias, todas elas ilustrando regiões com tumores benignos ou malignos.

A seguir serão apresentadas algumas imagens com os respectivos resultados de segmentação para cada modelo utilizado. É preciso ressaltar a necessidade de uma segmentação ótima para que os resultados obtidos pudessem ser comparados. Por isso, foram usados dois conjuntos de imagens segmentadas manualmente como referência para comparação. Estas segmentações manuais foram realizadas por dois radiologistas e obtidas junto ao Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC. Durante a apresentação dos resultados, estas segmentações manuais serão citadas simplesmente como **Manual 1** e **Manual 2**.

Para quantificar os resultados obtidos por cada método, foi utilizado o algoritmo *Polyline Distance Measure - PDM*, proposto por Suri [61] e amplamente utilizado em [62, 24]. O método PDM avalia a distância entre duas curvas. Neste caso, ele indica o quanto a borda estimada - obtida por algum método de segmentação - está distante da borda ideal - indicada por um especialista. Uma característica interessante neste método é sua eficiência mesmo nos casos em que as curvas possuem tamanhos diferentes.

Sejam A_{x_i, y_i} e B_{x_j, y_j} os pontos que definem as curvas A e B , respectivamente. Para cada ponto A_{x_i, y_i} , é computada a distância Euclidiana para os pontos em

B , armazenando a menor delas. A cada iteração o algoritmo faz a soma entre a menor distância atual e aquelas computadas anteriormente. Chamamos esta soma de $SomaDist_{AB}$. O processo é análogo para a curva B em relação a curva A , obtendo-se $SomaDist_{BA}$. Para normalizar o erro entre as curvas A e B , divide-se a soma de $SomaDist_{AB}$ e $SomaDist_{BA}$ pelo total de pontos em A e B . Esta medida de erro é dada em pixels.

Formalmente, o algoritmo PDM pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}
 MenorDist(A_{x,y}, B) &= \{min(A_{x,y}, B_{x_k, y_k}) \mid x_k, y_k \in B\} \\
 MenorDist(B_{x,y}, A) &= \{min(B_{x,y}, A_{x_k, y_k}) \mid x_k, y_k \in A\} \\
 SomaDist_{AB} &= \sum_{i=0}^{i=N_A} MenorDist(A_{x_i, y_i}, B) \\
 SomaDist_{BA} &= \sum_{j=0}^{j=N_B} MenorDist(B_{x_j, y_j}, A) \\
 Erro &= \frac{SomaDist_{AB} + SomaDist_{BA}}{N_A + N_B}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde N_A e N_B é o número de pontos pertencentes a curva A e B , respectivamente.

Desta forma, pode-se deduzir que

$$\begin{aligned}
 &\text{se } A \rightarrow B \\
 &\text{então } Erro \rightarrow 0.
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Em seguida são apresentadas as imagens sobre as quais os testes foram realizados e as tabelas com as medidas de erro fornecidas pelo algoritmo PDM: Figuras 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8 e Tabelas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, 6.8. Note que as imagens superiores são: a imagem original, a imagem resultante da segmentação manual 1 e a imagem resultante da segmentação manual 2, respectivamente. As imagens inferiores representam a segmentação obtida com os métodos propostos por: Caselles [1] (ver seção 3.4.1), Yang [3] (ver seção 4.1) e por Mora [2] (ver seção 4.2), respectivamente. Em relação às tabelas de resultados, elas denotam a medida de erro entre as segmentações manuais - os valores das linhas - e as obtidas pelos métodos estudados - os valores das colunas.

Além das imagens e tabelas de resultados, são mostradas ainda as tabelas com os parâmetros utilizados para cada um dos testes de cada método: Tabelas 6.9, 6.10 e 6.11.

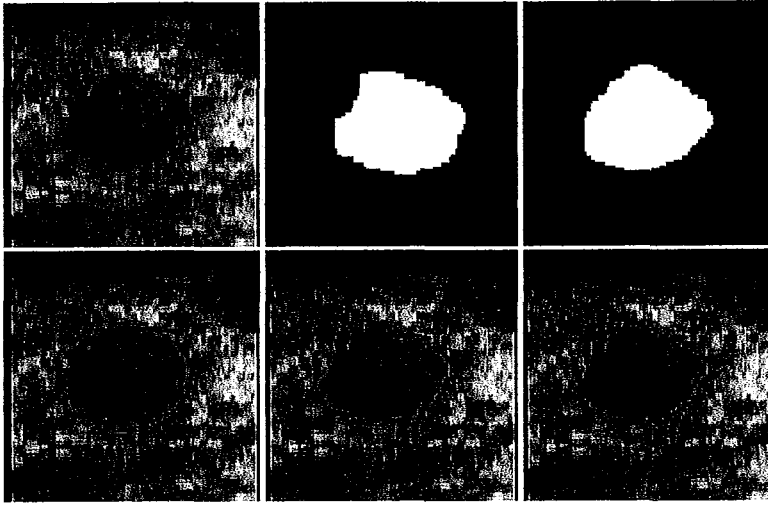


Figura 6.1: Resultados para ultra-sonografia 012.

	Manual	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$6.76852 \cdot 10^{-3}$	$1.55429 \cdot 10^{-3}$	$4.39303 \cdot 10^{-2}$	$1.80284 \cdot 10^{-2}$
Manual 2	$6.76852 \cdot 10^{-3}$	$5.61013 \cdot 10^{-3}$	$2.68488 \cdot 10^{-3}$	$1.11976 \cdot 10^{-3}$

Tabela 6.1: Medida de erro: Ultra-sonografia 012

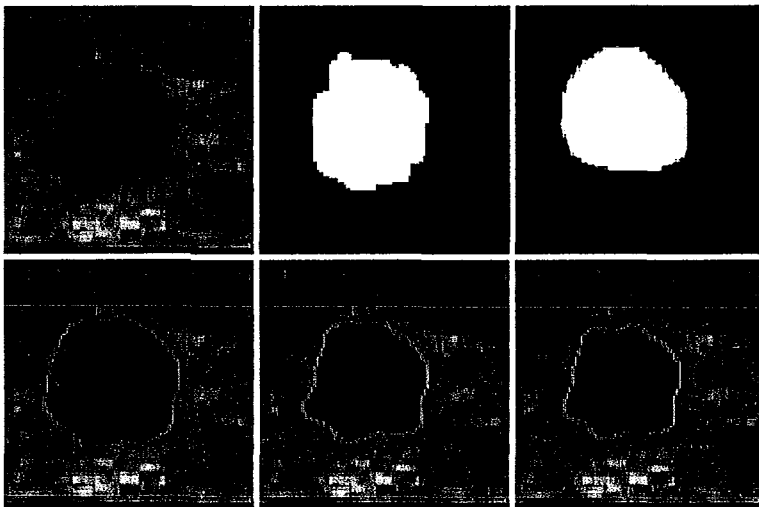


Figura 6.2: Resultados para ultra-sonografia 030.

	Manual	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$5.85467 \cdot 10^2$	$4.04548 \cdot 10^2$	$1.11813 \cdot 10^2$	$1.0595 \cdot 10^2$
Manual 2	$5.85467 \cdot 10^2$	$7.26522 \cdot 10^2$	$5.38405 \cdot 10^2$	$4.1936 \cdot 10^2$

Tabela 6.2: Medida de erro: Ultra-sonografia 030

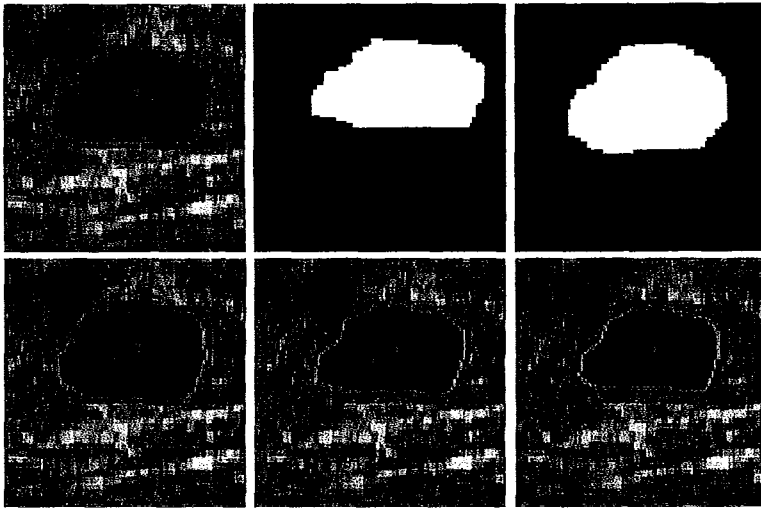


Figura 6.3: Resultados para ultra-sonografia 040.

	Manual	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$3.94851 \cdot 10^{-2}$	$2.73367 \cdot 10^{-2}$	$1.49103 \cdot 10^{-2}$	$1.17768 \cdot 10^{-2}$
Manual 2	$3.94851 \cdot 10^{-2}$	$6.17219 \cdot 10^{-3}$	$3.14655 \cdot 10^{-2}$	$4.36973 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.3: Medida de erro: Ultra-sonografia 040

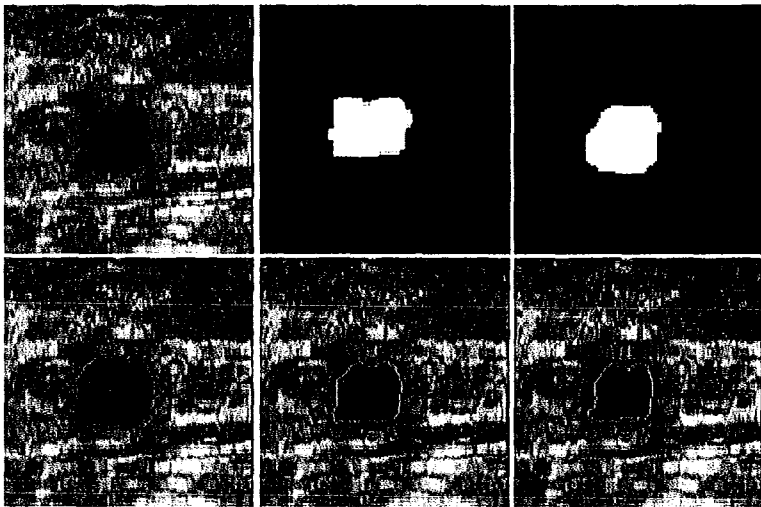


Figura 6.4: Resultados para ultra-sonografia 080.

	Manual	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$1.78347 \cdot 10^{-2}$	$3.38275 \cdot 10^{-2}$	$1.58202 \cdot 10^{-2}$	$4.10802 \cdot 10^{-2}$
Manual 2	$1.78347 \cdot 10^{-2}$	$7.61663 \cdot 10^{-3}$	$1.68256 \cdot 10^{-3}$	$1.02807 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.4: Medida de erro: Ultra-sonografia 080

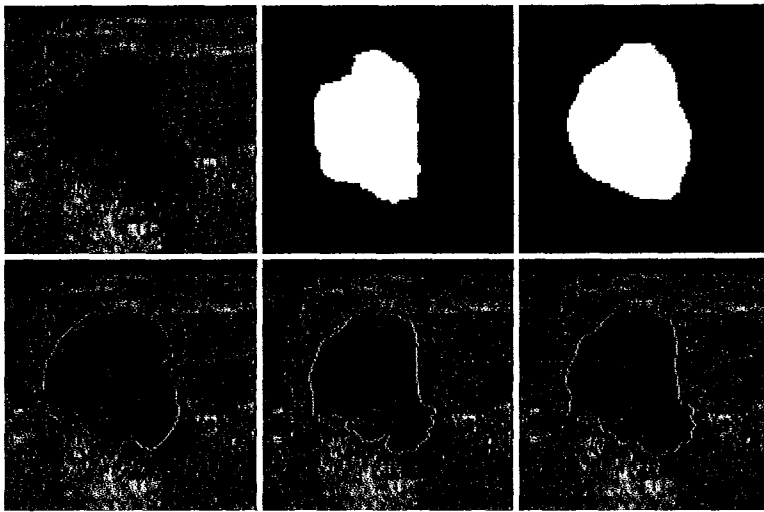


Figura 6.5: Resultados para ultra-sonografia 105.

	Manual	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$4.0193 \cdot 10^{-3}$	$2.59657 \cdot 10^{-2}$	$1.37045 \cdot 10^{-2}$	$1.12113 \cdot 10^{-2}$
Manual 2	$4.0193 \cdot 10^{-3}$	$4.27867 \cdot 10^{-3}$	$3.52377 \cdot 10^{-4}$	$4.53342 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.5: Medida de erro: Ultra-sonografia 105

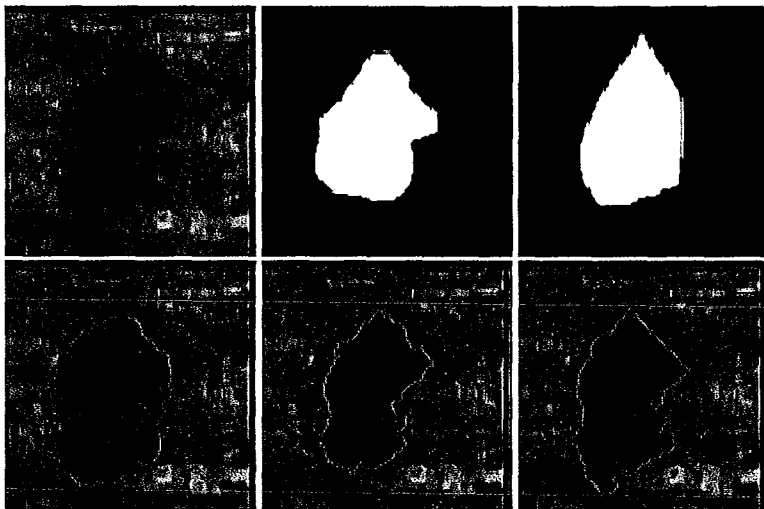


Figura 6.6: Resultados para ultra-sonografia 130.

	Manual	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$2.4448 \cdot 10^{-3}$	$2.76383 \cdot 10^{-2}$	$1.00671 \cdot 10^{-2}$	$1.43122 \cdot 10^{-2}$
Manual 2	$2.4448 \cdot 10^{-3}$	$2.89571 \cdot 10^{-2}$	$1.07685 \cdot 10^{-2}$	$1.92199 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.6: Medida de erro: Ultra-sonografia 130

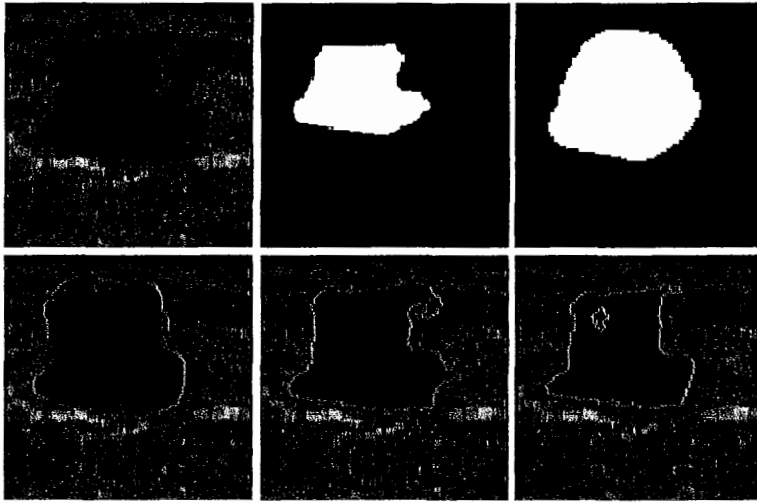


Figura 6.7: Resultados para ultra-sonografia 140.

	Manual	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$7.48452 \cdot 10^{-2}$	$2.44025 \cdot 10^{-2}$	$3.81877 \cdot 10^{-2}$	$2.85574 \cdot 10^{-2}$
Manual 2	$7.48452 \cdot 10^{-2}$	$6.25206 \cdot 10^{-2}$	$2.7502 \cdot 10^{-4}$	$9.78198 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.7: Medida de erro: Ultra-sonografia 140

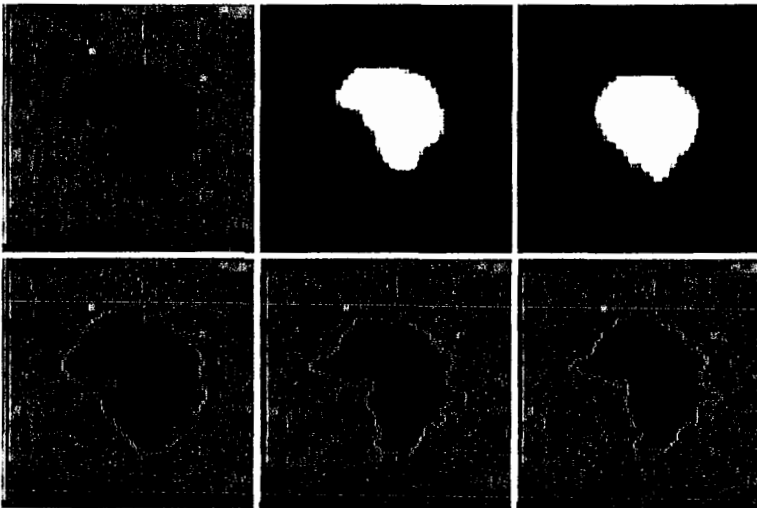


Figura 6.8: Resultados para ultra-sonografia 170.

	Manual 2	Caselles	Mora	Yang
Manual 1	$2.50685 \cdot 10^{-3}$	$7.44693 \cdot 10^{-2}$	$3.82256 \cdot 10^{-2}$	$2.622 \cdot 10^{-2}$
Manual 2	$2.50685 \cdot 10^{-3}$	$7.98469 \cdot 10^{-2}$	$3.889 \cdot 10^{-2}$	$1.86958 \cdot 10^{-2}$

Tabela 6.8: Medida de erro: Ultra-sonografia 170

	Valor α	Iterações	Raio
Figura 6.1	20	50	12
Figura 6.2	20	30	15
Figura 6.3	20	20	15
Figura 6.4	20	20	10
Figura 6.5	20	70	20
Figura 6.6	20	80	10
Figura 6.7	20	40	15
Figura 6.8	20	40	10

Tabela 6.9: Tabela de parâmetros utilizados para testes da abordagem proposta por Caselles [1]. Ver seção 3.4.1. A primeira coluna é o parâmetro α descrito na Equação 3.6, a segunda é o número de iterações utilizado nos testes mostrados, e a última coluna é o raio da curva inicial em pixels.

As diferenças entre as segmentações manuais podem ser percebidas visualmente nas figuras apresentadas (6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8), e comprovadas através dos valores de erro apresentados nas Tabelas 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 e 6.8. Estas diferenças podem ser explicadas pela forma como cada especialista define uma região de interesse - baseados em seu conhecimento e experiência. A divergência existente na delimitação da fronteira da região acaba afetando a análise da medida de similaridade entre duas segmentações, já que não há uma única curva exata.

Foram apresentadas tabelas onde são comparados os resultados dos métodos automáticos com cada uma das segmentações manuais. Analisando essas tabelas, verificamos que os resultados com maior similaridade entre um método automático e uma segmentação manual foram encontrados nas Tabelas 6.5 e 6.7. Nestes dois casos os métodos propostos por Mora [2] e Yang [3] apresentaram medidas de erro bem próximas a zero quando comparados à segmentação manual 2.

Em relação aos métodos automáticos, os modelos apresentados por Mora [2] e Yang [3] se mostraram mais eficientes do que o modelo proposto por Caselles [1], quando comparadas as medidas de erro. Além disso, o método de Caselles [1] apresentou dificuldades em oferecer resultados com maior nível de detalhes, pois quando se diminuía a energia interna da curva em busca de fronteiras não delineadas,

	Termo da Curvatura	Termo da Imagem	Iterações	Raio
Figura 6.1	1.00	1.00	30	10
Figura 6.2	1.00	1.25	30	10
Figura 6.3	1.00	1.75	30	10
Figura 6.4	1.00	2.50	30	10
Figura 6.5	1.00	1.25	30	20
Figura 6.6	1.00	1.40	30	10
Figura 6.7	1.00	1.25	30	15
Figura 6.8	1.00	1.25	30	10

Tabela 6.10: Tabela de parâmetros utilizados para testes da abordagem proposta por Mora[2]. Ver seção 4.2. A primeira coluna é o termo multiplicador da curvatura, a segunda é um multiplicador do termo da imagem, a terceira é o número de iterações necessárias para o alcance da borda, e a última coluna é o raio da curva inicial em pixels.

	Curvatura	Imagem	Iterações	Raio
Figura 6.1	0.25	10	20	15
Figura 6.2	0.10	50	40	15
Figura 6.3	0.10	25	40	12
Figura 6.4	0.10	25	40	10
Figura 6.5	0.10	25	40	20
Figura 6.6	0.10	30	30	10
Figura 6.7	0.10	20	50	15
Figura 6.8	0.10	50	60	10

Tabela 6.11: Tabela de parâmetros utilizados para testes da abordagem proposta por Yang[3]. Ver seção 4.1. A primeira coluna é o termo multiplicador da curvatura, a segunda é um multiplicador do termo da imagem, a terceira é o número de iterações necessárias para o alcance da borda, e a última coluna é o raio da curva inicial em pixels.

outros segmentos desta curva vazavam em locais com menor gradiente.

Uma possível justificativa para o melhor desempenho dos métodos de Mora [2] e Yang [3] sobre o de Caselles [1] pode ser deduzida do fato de que este último é um método genérico, enquanto os outros dois são modelos desenvolvidos, especificamente, para a segmentação de imagens de ultra-sonografias (ver Capítulo 4). A similaridade entre os dois métodos - Mora [2] e Yang [3] - pode ser notada quando comparadas as curvas obtidas por cada um dos métodos.

Uma outra característica observada durante os testes está relacionada ao local de inicialização da curva. O método de Caselles[1] se mostrou mais dependente de uma inicialização próxima à fronteira de interesse. Este fato não ocorreu em nenhum dos outros dois modelos, que acabaram apresentando resultados mais eficientes mesmo quando a curva inicial estava distante da borda, descentralizada ou com diâmetro reduzido.

Em relação ao tempo de processamento, em todos os testes foram obtidos resultados em tempo real, o que significa dizer que para as imagens e parâmetros utilizados, o tempo de processamento não foi maior do que um segundo. As imagens utilizadas tinham, em média, dimensões aproximadas à 512 x 512 pixels. Vale ainda registrar que a resolução da grade de atualização da função utilizada foi de um pixel para cada célula da grade.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um estudo sobre os métodos dos *level sets* e suas aplicações na área de segmentação de imagens médicas. Inicialmente, discutiu-se a idéia apresentada por Osher e Sethian em [7]. Os conceitos inerentes aos *level sets*, tais como modelo de evolução da curva, desenvolvimento da função de velocidade, critérios de parada, cálculo da curvatura e do vetor normal, e manipulação de mudanças topológicas, foram estudados e discutidos no Capítulo 2. Também foram analisadas aplicações e áreas de pesquisa onde os modelos de *level sets* são empregados.

Restringindo a área de estudos dos *level sets*, abordamos suas aplicações em segmentação de imagens médicas. Nesta fase foram descritos alguns dos principais modelos propostos pelos pesquisadores da área, entre eles os trabalhos de Caselles *et al* [49], Malladi *et al* [20], Kichenassamy *et al* [51], Yezzi *et al* [23] e Siddiqui *et al* [52]. Estes modelos, denominados “sem regularizadores”, utilizam informações de gradiente e curvatura para calcular a evolução da curva. Os modelos com regularizadores são aqueles que utilizam informações locais e globais retiradas da região por onde a curva está se movimentando, com o objetivo de computar a velocidade e a direção da evolução da curva. Estes modelos - com regularizadores - foram divididos em duas subclasses: a dos métodos baseados em clusterização (seção 3.5.1) e a dos métodos baseados em modelos bayesianos (seção 3.5.2).

Após iniciar os estudos sobre os modelos com regularizadores, focamos nossas pesquisas nos trabalhos de Mora [2] e Yang [3] que apresentam abordagens específicas para a segmentação de imagens de ultra-sonografias. Estas imagens possuem carac-

terísticas próprias, como a presença de *speckles* a pouca definição de suas bordas. Estes modelos descrevem adaptações a estas características e oferecem resultados mais eficientes do que os modelos genéricos.

Com o objetivo de testar os algoritmos estudados, implementamos uma interface gráfica que oferece praticidade na interação com os modelos de segmentação e com as imagens. Esta aplicação foi desenvolvida em C++ e utilizou em sua totalidade somente ferramentas gratuitas e multi-plataforma, o que agrega a possibilidade de utilização da mesma nos mais diversos sistemas operacionais.

Os testes foram realizados sobre uma base de dados composta por cerca de 250 imagens de mamografias captadas por ultra-sonografias, todas elas ilustrando regiões com tumores benignos ou malignos. O objetivo era realizar a segmentação de uma dada região de interesse de maneira automática, ou seja, após a inserção de uma curva inicial, o algoritmo deveria ser capaz de fazer a curva evoluir até a borda da região. Considerando a dificuldade em se definir as bordas das chamadas regiões de interesse, foi usada como modelo uma base de imagens contendo as segmentações feitas manualmente por dois radiologistas. A eficiência de cada método foi medida através do algoritmo PDM - *Polyline Distance Measure* - descrito no Capítulo 6. Este método fornece uma medida de erro para cada par de curvas computadas, permitindo que se quantifique a similaridade entre um resultado automático e uma segmentação manual feita por um especialista.

Os resultados comprovaram a superioridade dos métodos específicos para segmentação de imagens de ultra-sonografias, já que além de fornecer um maior nível de detalhes na detecção das bordas das regiões de interesse, obtiveram um menor custo de processamento. Mostrou-se também que os métodos automáticos se constituem uma interessante ferramenta na segmentação, oferecendo expressivo ganho de tempo em relação ao trabalho manual. Entretanto, é imprescindível o acompanhamento dos resultados por um especialista responsável por validar as segmentações obtidas, efetuando qualquer correção que se faça necessária.

Como trabalhos futuros, podemos citar a inclusão de medidas relativas a um conhecimento prévio da forma da região a ser segmentada. Estas informações poderiam ser agregadas ao modelo de energia empregado para a evolução da curva. Considerando a forma da captura por ultra-sonografia, onde há aquisição de ima-

gens em sequência e as regiões de interesse sofrem pequeno deslocamento em relação a imagem anterior, um algoritmo de segmentação que considere o sequencialmente da imagem seria interessante, já que poderíamos utilizar a segmentação da imagem anterior como inicialização da curva da próxima imagem.

Além destes exemplos, poderíamos adicionar a implementação de segmentação tridimensional, já que esta ofereceria uma maior liberdade na visualização e análise dos resultados.

Em relação à interface, durante uma segmentação, pode acontecer da curva não oferecer a melhor segmentação. Sendo assim, é interessante que haja a possibilidade de correção dos segmentos da curva, seja durante ou após o término do processo de evolução.

Apêndice A

Convertendo da formulação paramétrica para a implícita

Vamos partir do modelo paramétrico onde a energia da *snake* $C : u \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ proveniente do campo é dada pela integral ao longo de C de uma função real g definida em cada ponto p da imagem pelo valor do campo numa vizinhança de p . Em um exemplo típico, g pode ser a convolução de uma função Gaussiana G com o campo F ou, mais geralmente, o resultado de um processo de difusão aplicado à F .

Desse modo, a energia de campo $E_{campo}(C)$ da *snake* C é dada por

$$\oint g(C) ds, \tag{A.1}$$

em que ds expressa a diferencial do comprimento de arco C . Como essa diferencial é dada em cada ponto $C(u)$ por $|C'(u)| du$, temos então que

$$E_{campo}(C) = \oint g(C) |C'(u)| du. \tag{A.2}$$

Dentre as várias possibilidades para energia interna de C , vamos optar por aquela de descrição mais simples, considerando-a proporcional a área A de região delimitada por C . Neste caso temos:

$$E_{int}(C) = \alpha \int dA. \tag{A.3}$$

O desenvolvimento no caso de se considerar outras alternativas para a definição de energia interna é inteiramente análogo ao que será feito aqui.

Vamos chamar de $\delta(C) : u \in [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a uma pequena perturbação na definição de C , e relacionar precisamente esta perturbação com as variações $\delta E_{campo}(C)$ e $\delta E_{int}(C)$ que ela determina nas energias de campo e interna da curva.

A.1 Energia de Campo

Podemos escrever $\delta E_{campo}(C)$ da seguinte forma:

$$\delta E_{campo}(C) = \delta \left(\oint g(C) | C'(u) | du \right), \quad (\text{A.4})$$

e então, considerando a linearidade de um operador integral definido num espaço de funções, podemos passar a variação para dentro da integral, obtendo

$$\oint \delta \left(g(C) | C' | \right) du. \quad (\text{A.5})$$

Como a diferencial de $\delta(RS)$ de um produto de funções R e S é dado por $Rd(S) + Sd(R)$, A.5 é equivalente a

$$\oint \delta \left(g(C) \right) | C' | du + \oint g(C) \delta | C' | du. \quad (\text{A.6})$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\delta \left(g(C) \right) = \langle \nabla g(C), \delta(C) \rangle, \quad (\text{A.7})$$

assim, a primeira integral de A.6 se torna

$$\oint \langle \nabla g, \delta(C) \rangle | C' | du. \quad (\text{A.8})$$

Para expressar a segunda integral em um formato mais apropriado, lembremos inicialmente que

$$|C'| = \langle C', C' \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.9})$$

o que significa que:

$$\begin{aligned} \delta(|C'|) &= \frac{1}{2} \langle C', C' \rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot \delta \langle C', C' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle C', C' \rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 \langle C', \delta(C') \rangle \\ &= \frac{\langle C', \delta(C') \rangle}{|C'|}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Vamos aplicar agora o método de integração por partes, empregando especificamente a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \int_a^b \langle R(u), S(u) \rangle du &= \langle R(u), \int_a^b S(u) du \rangle \\ &\quad - \int_a^b \langle \frac{dR(u)}{du}, \int_a^b S(u) du \rangle du, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

com $R = g(C) \cdot \frac{C'}{|C'|}$ e $S = \delta(C')$.

Fazendo isso, lembrando ainda que $\delta(C) = \int \delta(C') du$, obtemos

$$\begin{aligned} \oint g(C) \frac{\langle C', \delta C' \rangle}{|C'|} &= \oint \left\langle \left(\frac{g(C) \cdot C'}{|C'|} \right), \delta C' \right\rangle du \\ &= \left\langle g(C(u)) \cdot \frac{C'(u)}{|C'(u)|}, \delta C \right\rangle \Bigg|_{u=0}^{u=1} \\ &\quad - \oint \left\langle \frac{d}{du} \left(g(C) \frac{C'}{|C'|} \right), \delta C \right\rangle du. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Como entretanto C é uma curva fechada, temos $\delta C(0) = \delta C(1)$ e conseqüentemente a expressão dada na primeira parcela de A.12 toma o mesmo valor em $u = 0$ e $u = 1$. Portanto, essa primeira parcela é nula. Considerando isso juntamente com a expressão A.8, relacionamos finalmente $\delta(C)$ e $\delta E_{campo}(C)$ por meio de

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{campo}}(C) &= \oint \langle \nabla g, \delta(C) \rangle |C'| du \\ &\quad - \oint \left\langle \frac{d}{du} \left(g(C) \frac{C'}{|C'|} \right), \delta C \right\rangle du. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Seja agora

$$s = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid s(u) = \int_0^u |C'(x)| dx \quad (\text{A.14})$$

a função que expressa o comprimento de um arco contido em C com extremidades em $C(0)$ e $C(x)$, e seja $C_s = C \circ s^{-1}$ a expressão de C em função do parâmetro s .

De A.14 obtemos, imediatamente, que

$$\begin{aligned} \frac{ds}{du} &= \frac{d}{du} \int_0^u |C'(x)| dx \\ &= |C'(u)| \mid \therefore \frac{du}{ds} = \frac{1}{|C'(u)|}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Por definição, a curvatura $K(C_s(s))$ da curva C no ponto $C_s(s)$ é dada por $\| \frac{d^2 C_s(s)}{ds^2} \|$. Como entretanto $\| \frac{dC_s(s)}{ds} \| = 1$, temos que $\frac{d^2 C_s(s)}{ds^2}$ deve ser ortogonal a $\frac{dC(s)}{ds}$ que tem exatamente a direção da tangente C em $C(s)$. Assim, $\frac{d^2 C_s(s)}{ds^2}$ é um vetor normal a curva C em $C_s(s)$ e escolhendo $N(C_s(s))$ adequadamente entre os dois vetores unitários que têm essa propriedade, podemos escrever

$$K(C_s(s)) \cdot N(C_s(s)) = \frac{d^2 C_s(s)}{ds^2}. \quad (\text{A.16})$$

Para voltarmos a parametrização original da curva $u \rightarrow C(u)$, devemos inicialmente aplicar a regra da cadeia e A.15 duas vezes, obtendo a seguinte seqüência de igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 C_s(s)}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \left(C_s(s) \right) \right) \\
&= \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{du} \left(C(u) \right) \cdot \frac{du}{ds} \right) \\
&= \frac{d}{ds} \left(C'(u) \cdot \frac{1}{|C'(u)|} \right) \\
&= \frac{d}{du} \left(\frac{C'(u)}{|C'(u)|} \right) \cdot \frac{du}{ds} \\
&= \frac{d}{du} \left(\frac{C'(u)}{|C'(u)|} \right) \cdot \frac{1}{|C'(u)|}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Assim, a Equação A.16 pode ser reescrita na forma

$$K(C(u)) \cdot N(C(u)) = \frac{d}{du} \left(\frac{C'(u)}{|C'(u)|} \right) \cdot \frac{1}{|C'(u)|} \tag{A.18}$$

Omitindo a especificação do ponto $C(u)$, onde se aplicam os funcionais K e N , podemos então escrever

$$\frac{d}{du} \left(\frac{C'(u)}{|C'(u)|} \right) = |C'(u)| \cdot KN. \tag{A.19}$$

Em vista desta expressão, podemos explicitar a influência da curvatura K na segunda integral da definição de δE_{campo} em A.13. Para isso, devemos observar inicialmente que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \left(g(C) \cdot \frac{C'}{|C'|} \right) &= \frac{d}{du} \left(g(C) \right) \frac{C'}{|C'|} + g(C) \frac{d}{du} \left(\frac{C'}{|C'|} \right) \\
&= \langle \nabla g(C), C' \rangle \cdot \frac{C'}{|C'|} + g(C) \cdot |C'| \cdot K \cdot \vec{N}.
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Levando A.20 em conta na definição dessa integral, temos:

$$\begin{aligned}
\oint \left\langle \frac{d}{du} \left(g(C) \cdot \frac{C'}{|C'|} \right), \delta C \right\rangle du &= \oint \left\langle \left(\langle \nabla g(C), C' \rangle \cdot \frac{C'}{|C'|} + g(C) \cdot |C'| \cdot K \cdot \vec{N} \right), \delta C \right\rangle du \\
&= \oint \left\langle \left(\frac{\langle \nabla g(C), C' \rangle \cdot C'}{|C'|^2} + g(C) \cdot K \cdot \vec{N} \right), \delta C \right\rangle \cdot |C'| du.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Nessa última expressão colocamos $|C'|$ em evidência e, como esse termo já aparece explicitamente na primeira integral, podemos representá-la na forma

$$E_{campo}(C) = \oint \left\langle \nabla g - \frac{\langle \nabla g(C), C' \rangle C'}{|C'|^2} - g(C) \cdot KN, \delta C \right\rangle |C'| du. \quad (\text{A.22})$$

Agora, observe que

$$\frac{\langle \nabla g(C), C' \rangle \cdot C'}{|C'|^2} = \left\langle \nabla g(C), \frac{C'}{|C'|} \right\rangle \cdot \frac{C'}{|C'|} \quad (\text{A.23})$$

é exatamente o vetor projeção de $\nabla(C)$ sobre a direção tangente à curva C em $C(u)$.

Como $\frac{C'}{|C'|}$ e N formam uma base ortonormal do \mathbb{R}^2 , esse vetor, somado ao obtido pela projeção sobre $N - \langle \nabla g(C), N \rangle \cdot N$, deve reproduzir o gradiente $\nabla g(C)$, o que significa que

$$\nabla g(C) - \left\langle \nabla g(C), \frac{C'}{|C'|} \right\rangle \frac{C'}{|C'|} = \langle \nabla g(C), N \rangle N. \quad (\text{A.24})$$

Empregando essa igualdade e lembrando que $ds = |C'| du$, podemos chegar a uma expressão mais compacta para δE_{campo} que é

$$\oint \left\langle \left(\langle \nabla g(C), N \rangle \cdot N - g(C) \cdot K \cdot N \right), \delta C \right\rangle ds. \quad (\text{A.25})$$

No desenvolvimento que iremos fazer posteriormente, será útil ter a Expressão A.25 numa forma ligeiramente diferente.

Havíamos escolhido $N(u)$ entre os dois vetores unitários ortogonais à curva C em $C(u)$ como aquele que tem o sentido de $\frac{d^2C}{ds^2}$ de forma que pudéssemos escrever $\frac{d^2C}{ds^2} = KN$, com $K > 0$.

Suponha que $u \rightarrow C(u)$ percorre a curva C no sentido positivo. Nesse caso, nos pontos onde C é côncava, N aponta para fora da região delimitada por C , e é obtida aplicando-se uma rotação de 90° no sentido horário ao unitário do vetor tangente $C' = (C'_x, C'_y)$. Nesse caso, N é, portanto, o vetor unitário de $(+C'_y, -C'_x)$, que representamos por \bar{N} . É o que acontece no ponto $C(u_2)$ na Figura A.1. \bar{N} é o vetor unitário à curva C que fica à direita dela considerando-se a orientação dada

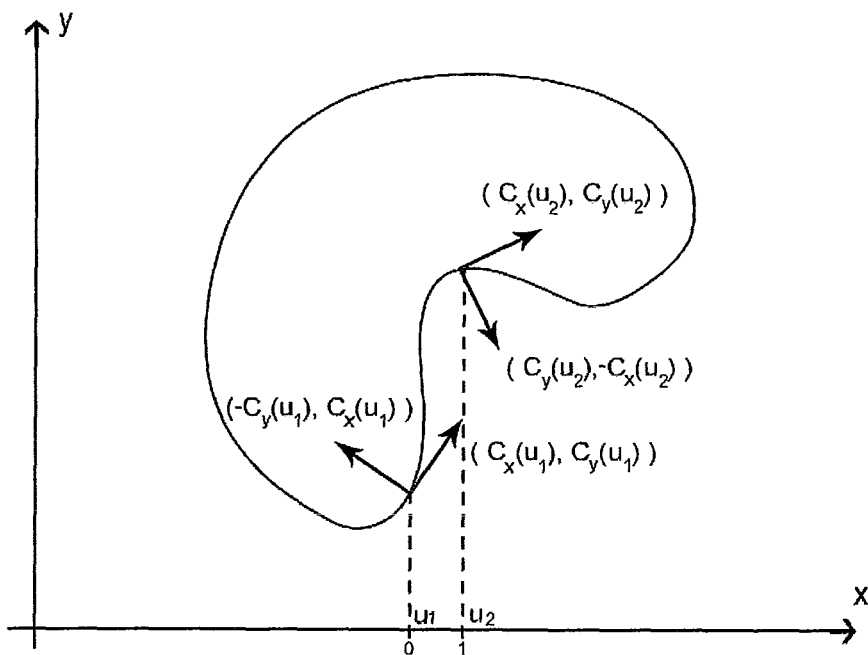


Figura A.1: Representação do vetor \bar{N} .

por $C(\cdot)$. Quando essa orientação tem o sentido positivo, \bar{N} aponta para fora da curva.

Nos pontos onde C é convexa, N aponta para dentro da curva e, para obtê-la, devemos aplicar uma rotação de 90° no sentido positivo ao unitário de C' . Nesse caso, ele é dado pelo vetor unitário de $(-C_y, +C_x) = -\bar{N}$. É o que acontece no ponto $C(u_1)$ na Figura A.1.

Para obter futuramente uma expressão de $\delta(E)$ de forma mais simplificada, vamos substituir N por \bar{N} em A.25. Para isso, precisamos antes definir $\bar{K} \in \mathbb{R}$ pela igualdade $KN = \bar{K}\bar{N}$. \bar{K} é positiva no caso côncavo e negativa no caso convexo. Ela passa, portanto, a ter um sinal, enquanto K era sempre positiva. A Expressão A.25 pode agora ser reescrita como:

$$\oint \left(\langle \nabla g(C), \bar{N} \rangle \cdot \bar{N} - g(C) \cdot \bar{K}\bar{N} \right), \delta C \rangle ds. \tag{A.26}$$

A.2 Energia Interna

Vamos agora expressar como varia a energia interna $E_{int}(C) = \alpha A$, onde A é a área da região delimitada por C quando esta curva é alterada por um acréscimo diferencial $\delta C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\delta C(0) = \delta C(1)$.

Conforme descrito no Apêndice B, a área A pode ser obtida fazendo

$$\int_0^1 C_x(u)C'_y(u)du \quad (\text{A.27})$$

e, em função disso temos:

$$\begin{aligned} \delta E_{int}(C) &= \delta(\alpha A) \\ &= \alpha \delta(A) \\ &= \alpha \delta \left(\int_0^1 C_x(u)C'_y(u)du \right) \\ &= \alpha \int_0^1 \delta \left(C_x(u) \cdot C'_y(u) \right) du \\ &= \alpha \int_0^1 \left(\delta(C_x)(u) \cdot C'_y(u) + C_x(u) \cdot \delta(C'_y)(u) \right) du. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Observe agora que a integral indefinida

$$\int \delta \left(C'_y(u) \right) du = \delta(C_y)(u) \quad (\text{A.29})$$

e, aplicando a integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 C_x(u)\delta(C'_y)(u)du &= C_x(u)\delta(C'_y)(u) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{du} \left(C_x(u) \right) \cdot \delta(C_y)(u) \\ &= - \int_0^1 C'_x(u)\delta(C_y)(u)du. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Isto porque como as curvas C e $C + \delta C$ são fechadas,

$$\begin{aligned} C'_x(0) &= C'_x(1) \\ \delta(C_y)(0) &= \delta(C_y)(1), \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

o que anula $C_x(u) \cdot \delta(C_y)(u) \Big|_0^1$.

Podemos então expressar A.28 na forma

$$\alpha \int_0^1 \delta C_x(u) \cdot C'_y(u) - C'_x(u) \delta(C_y)(u) du = \alpha \int_0^1 \left\langle \left[\delta C_x(u), \delta C_y(u) \right], \left[C'_y(u), -C'_x(u) \right] \right\rangle du. \quad (\text{A.32})$$

Pela própria definição de \bar{N} , temos que

$$\left[C'_y(u), -C'_x(u) \right] = \| C'(u) \| \cdot \bar{N}(u), \quad (\text{A.33})$$

e assim

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^1 \left\langle \left[\delta C_x(u), \delta C_y(u) \right], \left[C'_y(u), -C'_x(u) \right] \right\rangle du &= \alpha \int_0^1 \left\langle \delta \bar{C}(u), \| C'(u) \| \cdot \bar{N}(u) \right\rangle du \\ &= \alpha \int_0^1 \left\langle \delta \bar{C}(u), \bar{N}(u) \right\rangle \cdot \| C'(u) \| \cdot du. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Mas, $\| C'(u) \| \cdot du = ds$ e assim, mantendo a notação, por simplicidade, apesar da mudança de parâmetro, podemos escrever finalmente:

$$\delta E_{int}(C) = \alpha \oint \left\langle \delta C, \bar{N} \right\rangle ds. \quad (\text{A.35})$$

A.3 Energia Total

Juntando A.35 com A.26, o diferencial da energia total da curva $\delta E(C)$ se torna

$$\begin{aligned}
\delta E(C) &= \delta E_{campo}(C) + \delta E_{int}(C) \\
&= \oint \left\langle \left(\langle \nabla g(C), \bar{N} \rangle \cdot \bar{N} - g(C) \cdot \overline{KN} \right), \delta C \right\rangle ds + \alpha \oint \langle \bar{N}, \delta C \rangle ds \\
&= \oint \left\langle \left(\langle \nabla g(C), \bar{N} \rangle \cdot \bar{N} - g(C) \cdot \overline{KN} + \alpha \bar{N}, \delta C \right) \right\rangle ds \\
&= \oint \left(\langle \nabla g(C), \bar{N}, \bar{N} \rangle - g(C) \overline{K} + \alpha \right) \langle \bar{N}, \delta C \rangle ds.
\end{aligned}$$

(A.36)

A.4 Evolução da Snake Segundo a Direção de Máximo Decréscimo

Seja S o comprimento de C . Considere agora que δC está contida no espaço das funções de quadrado integrável de $[0, S]$ em \mathbb{R}^2 . Neste espaço podemos definir o produto interno $f \cdot g = \int_0^S \langle f(s), g(s) \rangle ds$ e a norma $\|f\|_2 = \left(\int_0^S \langle f(s) \cdot f(s) \rangle ds \right)^{1/2}$. Podemos agora tentar entender o conceito de “direção de máximo decréscimo” de $\delta E(C)$. Ela será a indicada pela perturbação δC^* tais que $\|\delta C\|_2 = 1$ para a qual $\delta E(C)(\delta C)$ atinge o valor mais negativo, entre todas as perturbações. Vamos mostrar que podemos definir C^* da seguinte forma:

seja $G(s) = (-K(s)g(C(s)) + \nabla g(s)N(s) + \alpha) \cdot N(s)$. Defina, então, δC^* como sendo a função $s \rightarrow \frac{-G(s)}{\|G\|_2}$, obviamente, $\|C^*\|_2 = 1$.

Tome agora outra perturbação δC pertencente ao espaço funcional em questão, tal que $\|\delta C\|_2 = 1$. Temos então:

$$\begin{aligned}
\delta E(C)(\delta C) &= \int_0^s (\nabla g(s) \cdot N(s) - K(s)g(C(s)) + \alpha) \langle N(s), \delta C(s) \rangle ds \\
&= \int_0^s \langle G(s), \delta C(s) \rangle ds \\
&= \int_0^s \|G\|_2 \langle \delta C^*(s), \delta C(s) \rangle ds \\
&= \|G\|_2 \int_0^s \langle \delta C^*(s), \delta C(s) \rangle ds \\
&= \|G\|_2 \int_0^s (\delta C_x^*(s) \cdot \delta C_x(s)) + (\delta C_y^*(s) \cdot \delta C_y(s)) ds \\
&\geq \|G\|_2 \int_0^s -\frac{1}{2} \left[\delta C_x^*(s)^2 + \delta C_x(s)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[\delta C_y^*(s)^2 + \delta C_y(s)^2 \right] ds \\
&= -\frac{1}{2} \|G\|_2 \int_0^s \left(\delta C_x^*(s)^2 + \delta C_y^*(s)^2 \right) + \left(\delta C_x(s)^2 + \delta C_y(s)^2 \right) ds \\
&= -\frac{1}{2} \|G\|_2 \left[\int_0^s \delta C_x^*(s)^2 + \delta C_y^*(s)^2 ds + \int_0^s \delta C_x(s)^2 + \delta C_y(s)^2 ds \right] \\
&= -\frac{1}{2} \|G\|_2 \left(\|\delta C^*\|_2 + \|\delta C\|_2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \|G\|_2 \left(1 + 1 \right) \\
&= -\|G\|_2
\end{aligned} \tag{A.37}$$

A única desigualdade nesta seqüência provém de $-(a^2 + b^2) \leq 2ab$ ou $-\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \leq ab$. Já que fazendo-se $\delta C = \delta C^*$ essa desigualdade se torna uma igualdade, verifica-se que

$$\delta E(C)(\delta C) > \delta E(C)(\delta C^*) \quad \forall \delta C \mid \|\delta C\|_2 = 1. \tag{A.38}$$

Assuma agora que C varia temporalmente de forma diferenciável. Vamos escrever C_t para indicar esta dependência, $\delta E(C)$ será dado, então, pela Expressão A.36 substituindo-se nela $\delta C(s)$ por $C'_t(s) \cdot \delta t$. Lembrando ainda a definição de G dada anteriormente, esta expressão se torna

$$\delta E(C_t)(C'_t(s) \cdot \delta t) = \left(\int_0^s \langle G(s), C'_t(s) \rangle ds \right) \delta t. \tag{A.39}$$

Se quisermos então que $E(C_t)$ decresça o máximo possível em todas as funções C_t de mesma norma devemos, em vista do exposto acima, fazer

$$\frac{C'_t}{\|C'_t\|_2} = \frac{-G}{\|G\|_2}. \quad (\text{A.40})$$

Isso será obtido se fizermos $C'_t = -G$, o que por simplicidade é normalmente adotado. Desse modo podemos escrever finalmente a equação que descreve a dinâmica de evolução de uma *snake* paramétrica C com a função de energia descrita acima. Ela é:

$$C'_t(s) = (K(s)g(C(s)) - \nabla g(C(s)) \cdot N(s) - \alpha)N(s), \forall s. \quad (\text{A.41})$$

A.5 Formulação Implícita

Suponha agora que C é definida implicitamente como sendo o conjunto de zeros de uma função ϕ de classe C_2 , isto é, $C = \{x \mid \phi(x) = 0\}$. Assumimos que ϕ é negativa no interior da curva e positiva em seu exterior. Como ϕ cresce para fora da curva e \bar{N} por definição também aponta para fora da curva, temos que:

$$\bar{N} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}. \quad (\text{A.42})$$

Seja, uma vez mais, C_s uma parametrização da curva C em função de seu comprimento de arco s . Conforme já foi visto, \bar{N} é igual ao unitário de $(C'_y, -C'_x) = (C'_{s,y}, -C'_{s,x})$. Isso significa que o vetor tangente unitário $(C'_{s,x}, C'_{s,y}) = (-\bar{N}_y, \bar{N}_x)$ pode ser obtido aplicando-se a \bar{N} uma rotação de 90° no sentido positivo. Juntando esse fato com a Equação A.42, temos

$$\frac{dC_s}{ds} = (C'_{s,x}, C'_{s,y}) = \bar{N} \cdot R = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \cdot R, \quad (\text{A.43})$$

onde R é a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ que deve ser multiplicada à direita de um vetor linha, para efetuar uma rotação de $+90^\circ$ em torno da origem.

Dado que a transformação linear determinada por R comuta com o operador de diferenciação, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{KN} &= KN = \frac{d}{ds} \left(\frac{dC}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\nabla\phi(x(s), y(s))}{\|\nabla\phi(x(s), y(s))\|} \right) \cdot R \\
&= \frac{d}{ds} \left(\frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}} \right) \cdot R \\
&= (C'_{s,x}, C'_{s,y}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}} \right) \end{pmatrix}}_M \cdot R.
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Esta última igualdade é obtida pela aplicação da regra da cadeia, multiplicando-se a derivada em relação a (x, y) - que nos dá a matriz que aparece do lado direito da igualdade - pelo vetor $(C'_{s,x}, C'_{s,y})$ que é derivado de $C_s(s) \rightarrow (x, y)$.

O Apêndice C é dedicado a mostrar que essa expressão corresponde a

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla\phi(x(s), y(s))}{\|\nabla\phi(x(s), y(s))\|} \right) \cdot \overline{N}, \tag{A.45}$$

e, portanto, temos

$$\begin{aligned}
KN &= \overline{KN} \\
&= -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla\phi(x(s), y(s))}{\|\nabla\phi(x(s), y(s))\|} \right) \cdot \overline{N}.
\end{aligned} \tag{A.46}$$

Em vista disso, podemos obter a partir da Equação A.41 a expressão que indica como deve variar a função ϕ em cada ponto, de forma que ela evolua segundo a direção de máximo decréscimo de energia.

Para isso, devemos observar que

$$\phi'_t(x(s), y(s)) = -\nabla\phi(x(s), y(s)) \cdot C'_t(s). \quad (\text{A.47})$$

A razão do sinal negativo é o fato de que se fôssemos de $C_t(s)$ para $C_{t+\Delta t}(s)$ com Δt suficientemente pequeno, então

$$C_{t+\Delta t}(s) \simeq C_t(s) + C'_t(s)\Delta t, \quad (\text{A.48})$$

e, em vista disso,

$$\phi_t(C_{t+\Delta t}(s)) \simeq \nabla\phi_t(C_t(s)) \cdot C'_t(s)\Delta t + \phi_t(C_t(s)), \quad (\text{A.49})$$

e, da mesma forma,

$$\phi_{t+\Delta t}(C_t(s)) \simeq \langle \nabla\phi_{t+\Delta t}(C_{t+\Delta t}(s)), C'_{t+\Delta t}(s) \rangle \cdot (-\Delta t) + \phi_{t+\Delta t}(C_{t+\Delta t}(s)). \quad (\text{A.50})$$

Mas se queremos que C_τ seja a curva de nível zero de ϕ_τ , então tanto $\phi_t(C_t(s)) = 0$ como $\phi_{t+\Delta t}(C_{t+\Delta t}(s)) = 0$.

Desse modo,

$$\begin{aligned} \phi'_t(C_t(s)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_{t+\Delta t}(C_t(s)) - \phi_t(C_t(s))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\phi_{t+\Delta t}(C_t(s))}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \nabla\phi(t + \Delta t)(C_{t+\Delta t}(s)), C'_{t+\Delta t}(s) \rangle \cdot (-1) + 0 \\ &= -\langle \nabla\phi(t)(C_t(s)), C'_t(s) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

Substituindo então na expressão de $C'_t(s)$ dada em A.41, $N(s)$ por $\frac{\nabla\phi(s)}{\|\nabla\phi\|}$ e KN por sua expressão dada por A.46, temos:

$$\begin{aligned}
\phi'_t &= -\langle \nabla \phi, \left(-\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) g - \nabla g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} - \alpha \right) \cdot \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \rangle \\
&= \left(\operatorname{div} \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} g + \nabla g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} + \alpha \right) \cdot \frac{\langle \nabla \phi, \nabla \phi \rangle}{\|\nabla \phi\|} \\
&= \left(\operatorname{div} \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} g + \nabla g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} + \alpha \right) \cdot \|\nabla \phi\|.
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Todas as funções indicadas no desenvolvimento acima precisariam ser aplicadas apenas aos pontos de $C_t(s)$, mas não há inconveniente se ela for aplicada a todos os pontos do domínio da imagem.

Como

$$\operatorname{div} \left(g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} g \right) + \nabla g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}, \tag{A.53}$$

a Equação A.52 admite uma forma mais compacta, dada por:

$$\phi'_t = \left(\operatorname{div} \left(g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + \alpha \right) \|\nabla \phi\|. \tag{A.54}$$

A.6 Fórmula Geral

A partir de A.52 pode-se obter uma formulação geral que englobe algumas das mais clássicas abordagens para controlar a evolução de uma *snake* implícita [63]. Essa formulação é obtida da seguinte maneira:

1. Acrescenta-se a A.52 um termo para fazer com que a evolução de ϕ dependa também de seu laplaciano. Seja $c\nabla^2\phi$ este termo.
2. Admite-se que cada uma das parcelas da expressão obtida com este acréscimo seja multiplicada por uma potência diferente de g . Essas parcelas se tornam então:

$$\operatorname{div} \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \cdot g^{p_1+1}, \quad \nabla g \cdot \nabla \phi \cdot g^{p_2}, \quad \alpha \|\nabla \phi\| \cdot g^{p_3}, \quad c\nabla^2\phi \cdot g^{p_4}.$$

A equação que controla a evolução da função ϕ torna-se então:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g^{p_1+1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \|\nabla \phi\| + g^{p_2} (\nabla g) \nabla \phi + g^{p_3} \alpha \|\nabla \phi\| + c \nabla^2 \phi \cdot g^{p_4}, \quad (\text{A.55})$$

em que p_i são parâmetros constantes inteiros não-negativos, e c é uma coeficiente real. A partir de então, podemos mostrar algumas das formulações clássicas que podem ser descritas por esta expressão.

Para se obter a equação usada por Goldenberg em [60], fazemos $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$ e $c = 0$. Com estes parâmetros e tendo em vista a igualdade A.53, a expressão acima se torna

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g(x, y) \left(\alpha + \operatorname{div} \left(g(x, y) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) \right) \|\nabla \phi\|. \quad (\text{A.56})$$

Como o autor supõe ainda que ϕ seja uma função distância, tem-se $\|\nabla \phi\| = 1$ e esta expressão se reduz a:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g (\alpha + \operatorname{div} (g \nabla \phi)) \quad . \quad (\text{A.57})$$

A fórmula usada por Caselles e Sapiro em [1] é obtida fazendo $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 1$ e $c = 0$. Assim, a expressão A.55 é reescrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \|\nabla \phi\| \operatorname{div} \left(g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + \alpha g \|\nabla \phi\|. \quad (\text{A.58})$$

A equação proposta por Turello em [64] vem de $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$, $c = 1/2^N$ e $p_4 = 2$, e em consequência disso temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g \|\nabla \phi\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + g (\nabla g \cdot \nabla \phi) + \alpha g^2 \|\nabla \phi\| + \frac{1}{2^N} g^2 \nabla^2 \phi. \quad (\text{A.59})$$

Finalmente, a de Schlegel [64] resulta da seguinte atribuição: $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$, $c = 1$ e $p_4 = 2$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = g \left[\|\nabla \phi\| \operatorname{div} \left(g \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \right) + \alpha g \|\nabla \phi\| + g \nabla^2 \phi \right]. \quad (\text{A.60})$$

Apêndice B

Regiões de uma Curva Fechada

Seja A a área da região limitada pela curva simples, fechada e continuamente diferenciável $u \in [0, 1] \rightarrow C(u) \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\{R_1, R_2, \dots, R_M\}$ uma partição dessa região em componentes convexas na direção do eixo da coordenada y , tal como representado na Figura B.1.

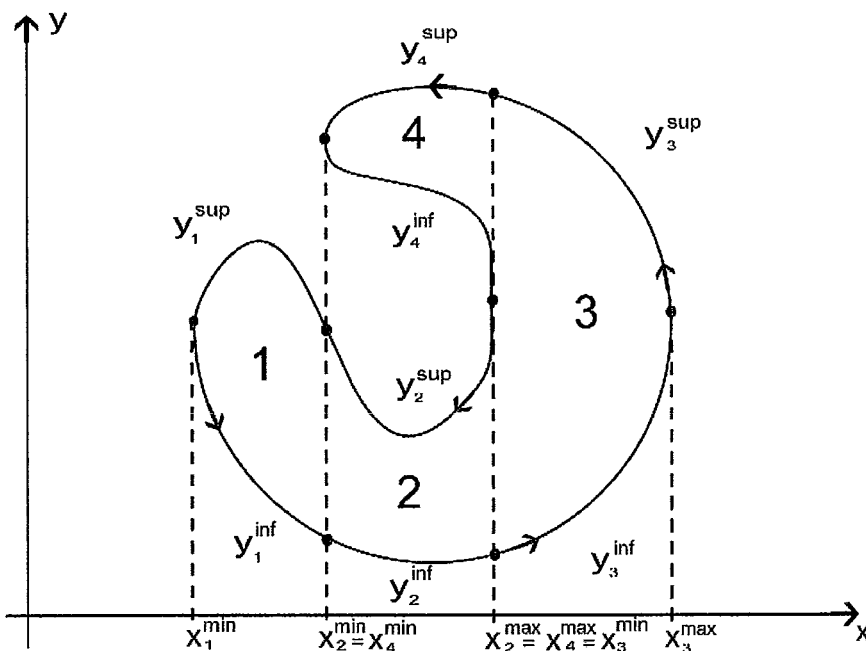


Figura B.1: Um curva fechada e suas regiões.

Faça agora A_i ser a área do fecho $\overline{R_i}$ de R_i , e x_i^{\min} e x_i^{\max} o mínimo e o máximo da coordenada x dos pontos em $\overline{R_i}$. Observe então que a borda de $\overline{R_i}$ é constituída por até dois segmentos com a direção do eixo da coordenada y e duas curvas C_i^{\sup} e C_i^{\inf} que são gráficos de funções reais y_i^{\sup} e y_i^{\inf} definidas em $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$. Nesse

caso,

$$A_i = \int_{x_i^{min}}^{x_i^{max}} y_i^{sup}(x) dx - \int_{x_i^{min}}^{x_i^{max}} y_i^{inf}(x) dx. \quad (\text{B.1})$$

Vamos agora redefinir cada uma dessas integrais em função do parâmetro u . Inicialmente, faça $C_x(u)$ e $C_y(u)$ expressarem as coordenadas de $C(u)$ em relação ao sistema \overline{xy} . Observe então que o gráfico de y_i^{sup} constitui um trecho contínuo da curva C , especificamente aquele obtido limitando-se o domínio da função C a um intervalo $[u_{i,0}^{min}, u_{i,0}^{max}] \subseteq [0, 1]$.

Para todo u neste intervalo, temos

$$x = C_x(u) \Rightarrow y_i^{sup}(x) = C_y(u). \quad (\text{B.2})$$

Suponha agora que $u \rightarrow C(u)$ descreve um percurso da curva no sentido horário (se o percurso for anti-horário, o vizinho que deve ser empregado é inteiramente análogo). Nesse caso, como pode ser observado na Figura B.1, devemos ter:

$$\begin{aligned} C(u_{i,0}^{min}) &= (x_i^{min}, y_i^{sup}(x_i^{min})) \\ C(u_{i,0}^{max}) &= (x_i^{max}, y_i^{sup}(x_i^{max})). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Isso deve-se ao fato de que nesse caso \overline{R}_i tem que estar simultaneamente abaixo de C_i^{sup} e a direita dele, considerando-se a direção de percurso determinada por $u \rightarrow C(u)$.

Em vista disso, e fazendo $dx = C'_x du$, podemos reescrever

$$\int_{x_i^{min}}^{x_i^{max}} y_i^{sup}(x) dx$$

como uma integral em u por meio das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{x_i^{min}}^{x_i^{max}} y_i^{sup}(x) dx &= \int_{u_{i,0}^{min}}^{u_{i,0}^{max}} y_i^{sup}(C'_x(u)) du \stackrel{\text{B.2}}{=} \\ &= \int_{u_{i,0}^{min}}^{u_{i,0}^{max}} C_y(u) \cdot C'_x(u) du. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Pode-se agora repetir o raciocínio com y_i^{sup} no lugar de y_i^{inf} , obtendo um intervalo $[u_{i,1}^{min}, u_{i,1}^{max}]$ tal que $C([u_{i,1}^{min}, u_{i,1}^{max}]) = C_i^{inf}$, só que agora,

$$\begin{aligned} C(u_{i,1}^{min}) &= (x_i^{max}, y_i^{sup}(x_i^{max})) \\ C(u_{i,1}^{max}) &= (x_i^{min}, y_i^{sup}(x_i^{min})). \end{aligned} \quad (B.5)$$

É que nesse caso, \overline{R}_i tem que estar acima de C_i^{inf} e a direita dele, considerando-se a direção de percurso dada por $u \rightarrow C(u)$.

Em vista disso devemos ter:

$$\int_{x_i^{min}}^{x_i^{max}} y_i^{inf}(x) dx = \int_{u_{i,1}^{max}}^{u_{i,1}^{min}} C_y(u) \cdot C'_x(u) du - \int_{u_{i,1}^{min}}^{u_{i,1}^{max}} C_y(u) \cdot C'_x(u) du. \quad (B.6)$$

Juntando B.4 e B.6 temos então que

$$A_i = \int_{u_{i,0}^{min}}^{u_{i,0}^{max}} C_y(u) \cdot C'_x(u) du + \int_{u_{i,1}^{min}}^{u_{i,1}^{max}} C_y(u) \cdot C'_x(u) du. \quad (B.7)$$

Devemos considerar agora que o conjunto ζ de intervalos composto por $[u_{i,0}^{min}, u_{i,0}^{max}]$ e $[u_{i,1}^{min}, u_{i,1}^{max}]$ constitui uma partição de $[0, 1]$, porque:

1. Todo ponto de C está em uma curva C_i^{sup} ou numa curva C_i^{inf} ;
2. As duas curvas nestes dois grupos podem ter em comum apenas as suas extremidades.

Em função deste fato, tem-se finalmente que

$$\begin{aligned} A &= \sum_i A_i = \sum_i \int_{u_{i,0}^{min}}^{u_{i,0}^{max}} C_y(u) \cdot C'_x(u) du + \int_{u_{i,1}^{min}}^{u_{i,1}^{max}} C_y(u) \cdot C'_x(u) du \\ &= \int_{I \in \zeta} C_y(u) \cdot C'_x(u) du \\ &= \int_0^1 C_y(u) \cdot C'_x(u) du. \end{aligned} \quad (B.8)$$

Apêndice C

Relação entre Curvatura e Divergente

Este apêndice se destina a mostrar que

$$A.44 = -\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi(x(s), y(s))}{\|\nabla \phi\|(x(s), y(s))} \right) \cdot \bar{N}, \quad (C.1)$$

Trabalhando a expressão de cada componente da matriz M , definida em A.44, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}} \right) &= \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right)}{\gamma \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}}}{\left(\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} \right)^2} \\
&= \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right)^{3/2}} \\
&= \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

e, de forma análoga,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}} \right) = \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 \right)^{3/2}}. \tag{C.3}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}} \right) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} - \frac{\left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \mathcal{N} \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right)}{\mathcal{N} \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}} \right)}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x}}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

e, similarmente,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}} \right) = \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}} \tag{C.5}$$

Portanto, M tem a forma dada abaixo:

$$M = \frac{1}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right)^{3/2}} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{vmatrix} \tag{C.6}$$

Além disso, conforme já foi visto $(C'_{s,x}(s), C'_{s,y}(s))$, o vetor tangente unitário de C em $C(s)$, o que significa que ele é o resultado de se aplicar uma rotação de 90° a \overline{N} no sentido positivo, ou seja:

$$\begin{aligned}
(C'_{s,x}(s), C'_{s,y}(s)) &= \overline{N} \cdot R \\
&= (-\overline{N}_y, \overline{N}_x) \\
&= \frac{\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(C'_{s,x}(s), C'_{s,y}(s)) \cdot M \cdot R &= \frac{1}{\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right)^2} \cdot \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \cdot M \cdot R \\
&= \frac{1}{\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right)^2} \cdot \left(\overbrace{\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \cdot M_{\bullet,1}}^A, \overbrace{\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \cdot M_{\bullet,2}}^B \right) \cdot 1
\end{aligned} \tag{C.8}$$

onde $M_{\bullet,j}$ é a j^{a} coluna de M . Operando, obtemos que as coordenadas A e B indicadas acima podem ser dadas por:

$$\begin{aligned}
A &= \left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right) \\
&= \left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^3 - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{C.9}$$

e

$$\begin{aligned}
B &= \left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^3 - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right) \\
&= \left(\frac{\partial\phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^3 - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial\phi}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Agora, observe que nas expressões de A e B podemos colocar $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right)$ em evidência. Isso nos permite reescrever a Equação C.8 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\text{C.8} &= \frac{1}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right)^2} \cdot (A, B) \cdot R \\
&= \frac{1}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right)^2} \cdot \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \cdot R.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

A multiplicação por R determina a troca de $\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ por $\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$, e então, fatorando o denominador e separando em duas parcelas os termos de expressão entre colchetes, a Equação C.11 toma a seguinte forma:

$$\left[\frac{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{\left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right)}{\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right)^{3/2}} \right] \cdot \frac{-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}} \tag{C.12}$$

Mas, pelo que já vimos, o vetor que aparece nessa expressão é exatamente $-\bar{N}$, e cada uma das parcelas que o multiplicam valem pela ordem

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}} \right) \text{ por C.2, e} \tag{C.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}} \right) \text{ por C.3.} \tag{C.14}$$

Portanto, a soma das duas parcelas reproduz o divergente de

$$\left(\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2}} \right), \tag{C.15}$$

que é o unitário do gradiente de ϕ . Desta forma, podemos finalmente escrever que

$$\begin{aligned} KN &= \overline{KN} \\ &= -\text{div} \left(\frac{\nabla \phi(x(s), y(s))}{\|\nabla \phi\|(x(s), y(s))} \right) \cdot \overline{N}. \end{aligned} \tag{C.16}$$

Referências Bibliográficas

- [1] CASELLES, V., KIMMEL, R., SAPIRO, G., “Geodesic Active Contours”, *International Journal of Computer Vision*, v. 22, n. 1, pp. 61–79, 1997.
- [2] MORA, M., TAUBER, C., BATATIA, H., “Robust Level Set for Heart Cavities Detection in Ultrasound Images”, *Computers in Cardiology*, pp. 235–238, September 2005.
- [3] YANG, Y., LIN, P., ZHENG, C., et al., “A robust level set framework for medical image segmentation”, *International Conference on Communications, Circuits and Systems*, pp. 937–941, June 2004.
- [4] STEFAN SCHENKE, B. C. W., DENZLER, J., “GPU-Based Volume Segmentation”. In: *Proceedings of IVCNZ '05*, v. 29, n. 28, pp. 171–176, Dunedin, New Zealand, November 2005.
- [5] N-BARBOSA, K. M., ACCO, M., KIRCHNER, F. F., “Classificação de imagens ikonos e comparação por meio de segmentação e fotointerpretação da área amostral”. In: *XI Simpósio de Sensoriamento Remoto*, pp. 281–283, Belo Horizonte, 2003.
- [6] SONKA, M., FITZPATRICK, J. M., “Handbook of Medical Imaging - Processing and Analysis I.N..” *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 20, n. 3, pp. 249–250, 2001.
- [7] OSHER, S., SETHIAN, J. A., “Fronts propagation with curvature dependent seed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”, *Journal of Computational Physics*, v. 79, pp. 12–49, 1987.

- [8] SETHIAN, J., “Level Set Methods: An Act of Violence - Evolving Interfaces in Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Materials Sciences”, *American Scientist*, v. 85, n. 3, pp. 254–263, 1997.
- [9] WEYL, H., *The Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Atheneum, New York, 1963.
- [10] PEIXOTO, A., VELHO, L., *Transformadas de Distâncias*, Tech. rep., Pontífice Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2000.
- [11] SETHIAN, J. A. ., *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision and Material Science*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] SETHIAN, J. A., “Curvature and the evolution of fronts”, *Communications in Mathematical Physics*, v. 101, pp. 487–499, 1985.
- [13] GRAYSON, M., “The heat equation shrinks embedded plane curves to round points”, *Journal of Differential Geometry*, v. 26, 1987.
- [14] CHOPP, D. L., “Computing minimal surfaces via level set curvature flow”, *J. Comput. Phys.*, v. 106, n. 1, pp. 77–91, 1993.
- [15] SETHIAN, J. A., “A Review of Recent Numerical Algorithms for Hypersurfaces Moving with Curvature-Dependent Speed”, *Journal of Differential Geometry*, v. 31, pp. 131–161, 1989.
- [16] FEDDERN, C., WEICKERT, J., BURGETH, B., et al., “Curvature-Driven PDE Methods for Matrix-Valued Images”, *Int. J. Comput. Vision*, v. 69, n. 1, pp. 93–107, 2006.
- [17] WESTERMANN, R., JOHNSON, C., ERTL, T., “A level-set method for flow visualization”. In: *VIS '00: Proceedings of the conference on Visualization '00*, pp. 147–154, IEEE Computer Society Press: Los Alamitos, CA, USA, 2000.
- [18] CATTÉ, F., DIBOS, F., KOEPFLER, G., “A Morphological Scheme for Mean Curvature Motion and Applications to Anisotropic Diffusion and Motion

- of Level Sets”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 32, n. 6, pp. 1895–1909, 1995.
- [19] SETHIAN, J. A., “Curvature flow and entropy conditions applied to grid generation”, *Journal of Computational Physics*, v. 115, pp. 440–454, 1994.
- [20] MALLADI, R., SETHIAN, J. A., VEMURI, B. C., “Shape modeling with front propagation: A level set approach”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 12, n. 7, pp. 158–175, February 1995.
- [21] PERONA, P., MALIK, J., “Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. PAMI-12, n. 7, pp. 629–639, 1990.
- [22] KICHENASSAMY, S., KUMAR, A., OLVER, P. J., et al., “Gradient Flows and Geometric Active Contour Models”. In: *IEEE Fifth International Conference on Computer Vision*, pp. 694–699, 1995.
- [23] YEZZI, A. J., KICHENASSAMY, S., KUMAR, A., et al., “Gradient Flows and Geometric Active Contour Models”. In: *IEEE Fifth International Conference on Computer Vision*, pp. 694–699, 1997.
- [24] SURI, J., LIU, K., SINGH, S., et al., “Shape Recovery Algorithms Using Level Sets in 2-D/3-D Medical Imagery: A State-of-the-Art Review”, *IEEE Transactions in Information Technology in Biomedicine*, 2002.
- [25] ZHAO, H., *A Fast Sweeping Method for Eikonal Equations*, Tech. rep., Department of Mathematics, University of California, Irvine, 2005.
- [26] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., et al., *Introduction to Algorithm*. 2nd ed. MIT Press, January 2001.
- [27] ADALSTEINSSON, D., SETHIAN, J. A., “A Fast Level Set Method for Propagation Interfaces”, *Journal of Computational Physics*, v. 118, n. 2, pp. 269–277, 1997.
- [28] MANSOURI, A.-R., KONRAD, J., “Motion segmentation with level sets”. pp. 126–130.

- [29] PARAGIOS, N. K., DERICHE, R., “A PDE-Based Level-Set Approach for Detection and Tracking of Moving Objects”. In: *ICCV '98: Proceedings of the Sixth International Conference on Computer Vision*, p. 1139, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 1998.
- [30] MANSOURI, A., KONRAD, J., “Minimum description length region tracking with level sets”, 2000.
- [31] MANSOURI, A., SIRIVONG, B., KONRAD, J., “Multiple motion segmentation with level sets”, 2000.
- [32] SOCHEN, N., KIMMEL, R., MALLADI, R., “A general framework for low level vision”, 1997.
- [33] LEFOHN, A. E., KNISS, J. M., HANSEN, C. D., et al., “Interactive Deformation and Visualization of Level Set Surfaces Using Graphics Hardware”. In: *VIS '03: Proceedings of the 14th IEEE Visualization 2003 (VIS'03)*, p. 11, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2003.
- [34] CHOPP, D., SETHIAN, J., “Flow under curvature: Singularity formation, minimal surfaces, and geodesics”, 1993.
- [35] MULDER, W., OSHER, S., SETHIAN, J. A., “Computing interface motion in compressible gas dynamics”, *Journal of Computational Physics*, v. 100, n. 2, pp. 209–228, 1992.
- [36] RHEE, C., TALBOT, L., SETHIAN, J. A., “Dynamical Study of a Premixed V flame”, *Journal of Fluid Mechanics*, v. 300, pp. 87–115, 1995.
- [37] ADALSTEINSSON, D., SETHIAN, J. A., “A level set approach to a unified model for etching, deposition, and lithography : algorithms and two-dimensional simulations”, *Journal of Computational Physics*, v. 120, pp. 128–144, 1995.
- [38] SETHIAN, J., ADALSTEINSSON, D., “An Overview of Level Set Methods for Etching, Deposition, and Lithography Development”, 1997.

- [39] WHITAKER, R. T., “A Level-Set Approach to 3D Reconstruction from Range Data”, *Int. J. Comput. Vision*, v. 29, n. 3, pp. 203–231, 1998.
- [40] BREEN, D. E., WHITAKER, R. T., “A Level-Set Approach for the Metamorphosis of Solid Models”, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, v. 7, n. 2, pp. 173–192, 2001.
- [41] FAUGERAS, O., KERIVEN, R., “Variational principles, surface evolution, pde’s, level set methods and the stereo problem”. In: *IEEE Trans. Image Processing*, v. 7, n. 3, pp. 336–344, 1998.
- [42] KIMMEL, R., AMIR, A., BRUCKSTEIN, A. M., “Finding shortest paths on surface using level sets propagation”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 17, n. 1, pp. 635–640, 1995.
- [43] SAPIRO, G., “Color snakes”, *Computer Vision Image Understanding*, v. 68, n. 2, pp. 247–253, 1997.
- [44] SAMSON, C., BLANC-FERAUD, L., AUBERT, G., et al., “A Level Set Model for Image Classification”, *Int. J. Comput. Vision*, v. 40, n. 3, pp. 187–197, 2000.
- [45] KASS, M., WITKIN, A., TERZOPOULOS, D., “Snakes: Active Contour Models”, *International Journal of Computer Vision*, v. 1, n. 4, pp. 321–331, 1987.
- [46] MCINERNEY, T., TERZOPOULOS, D., “Deformable Models”, pp. 127–145, *Handbook of Medical Imaging Processing and Analysing*, 2000.
- [47] OLIVEIRA, A. A. F., RIBEIRO, S., ESPERANÇA, C., et al., “Loop Snakes: The Generalized Model.” In: *IV*, pp. 975–980, 2005.
- [48] OLIVEIRA, A. A. F., RIBEIRO, S., FARIAS, R. C., et al., “Loop Snakes: Snakes with Enhanced Topology Control.” In: *SIBGRAPI*, pp. 364–371, 2004.
- [49] CASELLES, V., CATT, F., COLL, T., et al., “A geometric model for active contours”, *Numerische Mathematik*, v. 66, pp. 1–31, 1993.

- [50] MALLADI, R., SETHIAN, J., “An $O(N \log N)$ algorithm for shape modeling”, 1996.
- [51] KICHENASSAMY, S., KUMAR, A., OLVER, P., et al., “Conformal curvature flows: From phase transitions to active vision”, 1996.
- [52] SIDDIQI, K., LAUZIÈRE, Y., TANNENBAUM, A., et al., “Area and length-minimizing flows for shape segmentation”, *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998.
- [53] MALLADI, R., SETHIAN, J. A., “A Real-Time Algorithm for Medical Shape Recovery”. In: *ICCV '98: Proceedings of the Sixth International Conference on Computer Vision*, p. 304, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 1998.
- [54] JR, A. Y., TSAI, A., WILLSKY, A., “A Statistical Approach to Snakes for Bimodal and Trimodal Imagery”. In: *ICCV '99: Proceedings of the International Conference on Computer Vision-Volume 2*, p. 898, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 1999.
- [55] LEVENTON, M., GRIMSON, W., FAUGERAS, O., “Statistical Shape Influence in Geodesic Active Contours”. In: *CVPR00*, pp. 316–323, 2000.
- [56] GUO, Y., VEMURI, B. C., “Hybrid Geometric Active Models for Shape Recovery in Medical Images”. In: *IPMI '99: Proceedings of the 16th International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, pp. 112–125, Springer-Verlag: London, UK, 1999.
- [57] DESCHAMPS, T., *Curve and Shape Extraction with Minimal Path and Level-Sets techniques - Applications to 3D Medical Imaging*, Ph.D. Thesis, Université Paris-IX Dauphine, Place du maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex, Dec. 2001.
- [58] PARAGIOS, N., DERICHE, R., “Geodesic Active Contours and Level Sets for the Detection and Tracking of Moving Objects”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 22, n. 3, pp. 266–280, 2000.

- [59] SARTI, A., MALLADI, R., *A Geometric Level Set Model for Ultrasounds Analysis*, Tech. rep., Ernest Orlando Lawrence Berkeley National Laboratory, October 1999.
- [60] GOLDENBERG, R., KIMMEL, R., RIVLIN, E., et al., “Fast Geodesic Active Contours”, *IEEE Trans. on Image Processing*, v. 10(10), pp. 1467–75, October 2001.
- [61] SURI, J., “Error and Shape Measurement tools for cardiac projection images: a closer look”, *International Conference in Applications of Patterns Recognition*, pp. 125–134, 1998.
- [62] SURI, J. S., “Leaking prevention in fast level sets using fuzzy models: an application in MR brain”. In: *Information of Tecnology Applications in Biomedicine*, pp. 220–225, Arlington - VA - USA, 2000.
- [63] KIM, Y., “A Summary of Implicit Snake Formulations”, .
- [64] SCHLEGEL, J., TURELLO, S., “Bildsegmentierung mit deformierbaren modellen varanderlicher topologie”, .
- [65] NOBLE, J. A., BOUKERROUI, D., “Ultrasound Image Segmentation: A Survey”, *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, v. 25, n. 8, pp. 987–1010, 2006.
- [66] MANNIESING, R., VELTHUIS, B. K., VAN LEEUWEN, M. S., et al., “Level set based cerebral vasculature segmentation and diameter quantification in CT angiography”, *Medical Image Analysis*, v. 10, n. 2, pp. 200–214, April 2006.
- [67] YU, G., MIAO, Y., LI, P., et al., “Multiscale Vessel Segmentation: A Level Set Approach.” In: *CIARP*, pp. 701–709, 2005.
- [68] MAROULIS, D. E., SAVELONAS, M. A., IAKOVIDIS, D. K., “Computer-Aided Thyroid Nodule Detection in Ultrasound Images”. In: *CBMS '05: Proceedings of the 18th IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems (CBMS'05)*, pp. 271–276, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2005.

- [69] PARAGIOS, N., DERICHE, R., “Geodesic active regions and level set methods for motion estimation and tracking”, *Comput. Vis. Image Underst.*, v. 97, n. 3, pp. 259–282, 2005.
- [70] PARAGIOS, N., JOLLY, M.-P., TARON, M., et al., “Active Shape Models and Segmentation of the Left Ventricle in Echocardiography.” In: *Scale-Space*, pp. 131–142, 2005.
- [71] DRAPACA, C. S., CARDENAS, V., STUDHOLME, C., “Segmentation of tissue boundary evolution from brain MR image sequences using multi-phase level sets.” *Computer Vision and Image Understanding*, v. 100, n. 3, pp. 312–329, 2005.
- [72] DROSKE, M., MEYER, B., RUMPF, M., et al., “An adaptive level set method for interactive segmentation of intracranial tumors”, *Neurological Research*, v. 27, n. 4, pp. 363–370, June 2005.
- [73] DAVIDSON, I., RAVI, S. S., “Clustering with Constraints: Feasibility Issues and the k-Means Algorithm.” In: *SDM*, 2005.
- [74] DONG, G., RAY, N., ACTON, S. T., “Intravital leukocyte detection using the gradient inverse coefficient of variation.” *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 24, n. 7, pp. 910–924, 2005.
- [75] DUAN, Q., ANGELINI, E. D., HERZ, S. L., et al., “Tracking of LV Endocardial Surface on Real-Time Three-Dimensional Ultrasound with Optical Flow.” In: *FIMH*, pp. 434–445, 2005.
- [76] BROX, T., WEICKERT, J., “Level Set Based Image Segmentation with Multiple Regions.” In: *DAGM-Symposium*, pp. 415–423, 2004.
- [77] DESCHAMPS, T., SCHWARTZ, P., TREBOTICH, D., et al., “Vessel segmentation and blood flow simulation using Level-Sets and Embedded Boundary methods.” In: *CARS*, pp. 75–80, 2004.
- [78] EL-FEGHALI, R., MITICHE, A., “Spatiotemporal motion boundary detection and motion boundary velocity estimation for tracking moving objects with

a moving camera: a level sets PDEs approach with concurrent camera motion compensation." *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 13, n. 11, pp. 1473–1490, 2004.

- [79] LAINE, A., ANGELINI, E. D., OTSUKA, R., et al., "Comparison of Ventricular Geometry for Two Real Time 3D Ultrasound Machines With Three Dimensional Level Set." In: *ISBI*, pp. 1323–1326, 2004.
- [80] SHAO, F., LING, K. V., NG, W. S., "Automatic 3d Prostate Surface Detection From Trus With Level Sets." *Int. J. Image Graphics*, v. 4, n. 3, pp. 385–403, 2004.
- [81] ZHAO, Y., ZHANG, L., LI, M., "Vascular Segmentation Using Level Set Method." In: *CIS*, pp. 510–515, 2004.
- [82] SHREEDHARA, K. S., KUMAR, M. A., "A new stopping force to level set method for medical image segmentation". In: *India Annual Conference*, pp. 191–194, December 20-22 2004.
- [83] XIAO, C.-Y., SU, Z., ZHU CHEN, Y., "A diffusion stick method for speckle suppression in ultrasonic images", *Pattern Recogn. Lett.*, v. 25, n. 16, pp. 1867–1877, 2004.
- [84] MUKHERJEE, D. P., RAY, N., ACTON, S. T., "Level set analysis for leukocyte detection and tracking." *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 13, n. 4, pp. 562–572, 2004.
- [85] RAY, N., ACTON, S. T., "Motion gradient vector flow: an external force for tracking rolling leukocytes with shape and size constrained active contours." *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 23, n. 12, pp. 1466–1478, 2004.
- [86] EL-FEGHALI, R., MITICHE, A., "Tracking with simultaneous camera motion subtraction by level set spatio-temporal surface evolution." In: *ICIP (3)*, pp. 929–932, 2003.
- [87] HASSAN, H. S., FARAG, A. A., "Cerebrovascular segmentation for MRA data using level sets." In: *CARS*, pp. 246–252, 2003.

- [88] MANSOURI, A.-R., KONRAD, J., “Multiple motion segmentation with level sets.” *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 12, n. 2, pp. 201–220, 2003.
- [89] MITICHE, A., EL-FEGHALI, R., MANSOURI, A.-R., “Motion tracking as spatio-temporal motion boundary detection.” *Robotics and Autonomous Systems*, v. 43, n. 1, pp. 39–50, 2003.
- [90] SHAO, F., LING, K. V., NG, W. S., “Evolving Bubbles for Prostate Surface Detection from TRUS Images.” In: *BIBE*, pp. 115–121, 2003.
- [91] MONTAGNAT, J., SERMESANT, M., DELINGETTE, H., et al., “Anisotropic filtering for model-based segmentation of 4D cylindrical echocardiographic images.” *Pattern Recognition Letters*, v. 24, n. 4-5, pp. 815–828, 2003.
- [92] SHERBONDY, A., HOUSTON, M., NAPEL, S., “Fast Volume Segmentation With Simultaneous Visualization Using Programmable Graphics Hardware”. In: *VIS '03: Proceedings of the 14th IEEE Visualization 2003 (VIS'03)*, p. 23, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2003.
- [93] BOSCH, J. G., MITCHELL, S. C., LELIEVELDT, B. P. F., et al., “Automatic Segmentation of Echocardiographic Sequences by Active Appearance Motion Models.” *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 21, n. 11, pp. 1374–1383, 2002.
- [94] SHAO, F., LING, K. V., NG, W. S., “3D Prostate Surface Detection from Ultrasound Images Based on Level Set Method.” In: *MICCAI (2)*, pp. 389–396, 2002.
- [95] WATANABE, M., KIKINIS, R., WESTIN, C.-F., “Level Set Based Integration of Segmentation and Computational Fluid Dynamics for Flow Correction in Phase Contrast Angiography.” In: *MICCAI (2)*, pp. 405–412, 2002.
- [96] SILVA, R., GIRALDI, G., STRAUSS, A. F., et al., “A Semi-automatic Surface Reconstruction Framework Based on T-Surfaces and Isosurface Extraction Methods”. In: *XV Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing*, pp. 762–766, August 16-20 2002.

- [97] CHAN, T. F., VESE, L. A., “A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing”. In: *VLSM '01: Proceedings of the IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods (VLSM'01)*, p. 161, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2001.
- [98] JIN, Y., LAINE, A., C, I., “An adaptive speed term based on homogeneity for level-set segmentation”. In: *SPIE Medical Imaging Conference*, pp. 383–390, San Diego - CA - USA, 2002.
- [99] LIN, N., YU, W., DUNCAN, J. S., “Combinative Multi-scale Level Set Framework for Echocardiographic Image Segmentation.” In: *MICCAI (1)*, pp. 682–689, 2002.
- [100] MANSOURI, A.-R., MITICHE, A., EL-FEGHALI, R., “Spatio-Temporal Motion Segmentation via Level Set Partial Differential Equations.” In: *SSIAI*, pp. 243–247, 2002.
- [101] MITICHE, A., EL-FEGHALI, R., MANSOURI, A.-R., “Tracking Moving Objects as Spatio-Temporal Boundary Detection.” In: *SSIAI*, pp. 106–110, 2002.
- [102] MOHANTA, P. P., SEN, A., MUKHERJEE, D. P., “Segmentation of Images Using Level Set Analysis.” In: *ICVGIP*, 2002.
- [103] PARAGIOS, N., ROUSSON, M., RAMESH, V., “Knowledge-based Registration & Segmentation of the Left Ventricle: A Level Set Approach.” In: *WACV*, pp. 37–42, 2002.
- [104] PARAGIOS, N., “A Variational Approach for the Segmentation of the Left Ventricle in Cardiac Image Analysis.” *International Journal of Computer Vision*, v. 50, n. 3, pp. 345–362, 2002.
- [105] SARTI, A., MALLADI, R., SETHIAN, J. A., “Subjective Surfaces: A Geometric Model for Boundary Completion”, *Int. J. Comput. Vision*, v. 46, n. 3, pp. 201–221, 2002.

- [106] YU, Z., BAJAJ, C. L., “Normalized Gradient Vector Diffusion and Image Segmentation”. In: *7th European Conference on Computer Vision*, pp. 517–530, 2002.
- [107] XIAO, G., BRADY, M., NOBLE, J. A., et al., “Segmentation of Ultrasound B-mode Images with Intensity Inhomogeneity Correction.” *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 21, n. 1, pp. 48–57, 2002.
- [108] VESE, L. A., CHAN, T. F., “A Multiphase Level Set Framework for Image Segmentation Using the Mumford and Shah Model.” *International Journal of Computer Vision*, v. 50, n. 3, pp. 271–293, 2002.
- [109] WAGSTA, K., CARDIE, C., ROGERS, S., et al., “Constrained K-means Clustering with Background Knowledge”. In: *Proceedings of 18th International Conference on Machine Learning (ICML-01)*, pp. 577–584, 2001.
- [110] OSHER, S., FEDKIW, R. P., “Level set methods: an overview and some recent results”, *J. Comput. Phys.*, v. 169, n. 2, pp. 463–502, 2001.
- [111] YU, H., WANG, D., TANG, Z., “Level Set Methods and Image Segmentation.” In: *MIAR*, pp. 204–, 2001.
- [112] XIAOHUI, H., BRUCE, C. J., PISLARU, C., et al., “Segmenting High Frequency Intracardiac Ultrasound Images of Myocardium into Infarcted, Ischemic and Normal Regions.” *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 20, n. 12, pp. 1373–1383, 2001.
- [113] ANGELINI, E. D., LAINE, A., TAKUMA, S., et al., “LV Volume Quantification via Spatio-Temporal Analysis of Real-Time 3D Echocardiography.” *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 20, n. 6, pp. 457–469, 2001.
- [114] MONTAGNAT, J., DELINGETTE, H., “A review of deformable surfaces: topology, geometry and deformation”, *Image and Vision Computing*, v. 19, n. 14, pp. 1023–1040, 2001.
- [115] WHITAKER, R. T., BREEN, D. E., MUSETH, K., et al., “A Framework for Level Set Segmentation of Volume Datasets.” In: *Volume Graphics*, 2001.

- [116] CHEN, Y., THIRUVENKADAM, S., HUANG, F., et al., “On the Incorporation of shape priors into geometric active contours”. In: *VLSM '01: Proceedings of the IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods (VLSM'01)*, p. 145, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2001.
- [117] RUMPF, M., STRZODKA, R., “Nonlinear Diffusion in Graphics Hardware”. pp. 75–84, 2001.
- [118] ZHANG, Y., BRADY, M., SMITH, S. M., “Segmentation of Brain MR Images through a Hidden Markov Random Field Model and the Expectation Maximization Algorithm.” *IEEE Trans. Med. Imaging*, v. 20, n. 1, pp. 45–57, 2001.
- [119] ZOLLEI, L., YEZZI, A., KAPUR, T., “A Variational Framework for Joint Segmentation and Registration”. In: *MMBIA '01: Proceedings of the IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis (MMBIA'01)*, p. 44, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2001.
- [120] BAILLARD, C., BARILLOT, C., BOUTHEMY, P., *Robust Adaptive Segmentation of 3D Medical Images with Level Sets*, Tech. rep., INRIA, Rennes - France, November 2000.
- [121] BAILLARD, C., HELLIER, P., BARILLOT, C., “Segmentation of 3D Brain Structures Using Level Sets and Dense Registration”. In: *MMBIA '00: Proceedings of the IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis*, p. 94, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2000.
- [122] HOPF, M., ERTL, T., “Hardware Accelerated Wavelet Transformations”. In: *Proceedings of EG/IEEE TCVG Symposium on Visualization VisSym '00*, pp. 93–103, May 2000.
- [123] HOPF, M., ERTL, T., “Accelerating Morphological Analysis with Graphics Hardware”. In: *Workshop on Vision, Modelling, and Visualization VMV '00*, pp. 337–345, infix, 2000.

- [124] MICHAEL LEVENTON, OLIVIER FAUGERAS, E. G. W. W., “Level Set Based Segmentation with Intensity and Curvature Priors”. In: *IEEE Workshop on Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis (MM-BIA)*, IEEE Computer Society: Washington, DC, USA, 2000.
- [125] SILVA, I., RIBEIRO-NETO, B., CALADO, P. P., et al., “Link-Based and Content-Based Evidential Information Retrieval in a Belief Network Model”, *Proceedings of the 23rd Annual ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*, pp. 96–103, July 2000.
- [126] XU, C., PHAM, D., PRINCE, J., *Image Segmentation using Deformable Models*. Handbook of Medical Imaging, vol 2, chapter 3, SPIE Press, 2000.
- [127] GOMES, J., FAUGERAS, O. D., “Reconciling Distance Functions and Level Sets”. In: *Scale-Space Theories in Computer Vision*, 2000.
- [128] PARAGIOS, N., DERICHE, R., “Coupled Geodesic Active Regions for Image Segmentation: A Level Set Approach”. In: *ECCV '00: Proceedings of the 6th European Conference on Computer Vision-Part II*, pp. 224–240, Springer-Verlag: London, UK, 2000.
- [129] JEHAN-BESSON, S., BARLAUD, M., AUBERT, G., “Detection and tracking of moving objects using a new level set based method”, 2000.
- [130] CHAN, T. F., VESE, L. A., “An Active Contour Model without Edges.” In: *Scale-Space*, pp. 141–151, 1999.
- [131] HOPF, M., ERTL, T., “Hardware-Based Wavelet Transformations”. In: *Workshop of Vision, Modelling, and Visualization (VMV '99)*, pp. 317–328, infix, 1999.
- [132] HOPF, M., ERTL, T., “Accelerating 3D Convolution using Graphics Hardware”. In: *Proc. Visualization '99*, pp. 471–474, 1999.
- [133] KORNPROBST, P., DERICHE, R., AUBERT, G., “Image Sequence Analysis via Partial Differential Equations”, *J. Math. Imaging Vis.*, v. 11, n. 1, pp. 5–26, 1999.

- [134] BRANDT, E., WIGSTRöM, L., WRANNE, B., “Segmentation of Echocardiographic Image Sequences Using Spatio-temporal Information”. In: *MICCAI '99: Proceedings of the Second International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, pp. 410–419, Springer-Verlag: London, UK, 1999.
- [135] MULET-PARADA, M., NOBLE, J. A., “2D+T Acoustic Boundary Detection in Echocardiography”. In: *MICCAI '98: Proceedings of the First International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, pp. 806–813, Springer-Verlag: London, UK, 1998.
- [136] MIKIC, I., KRUCINSKI, S., THOMAS, J., “Segmentation and tracking in echocardiographic sequences: Active contours guided by optical flow estimates”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 17, n. 2, pp. 274–284, 1998.
- [137] ADALSTEINSSON, D., SETHIAN, J., “The Fast Construction of Extension Velocities in Level Set Methods”, *Journal of Computational Physics*, v. 148, pp. 2–22, 1998.
- [138] ZENG, X., STAIB, L. H., SCHULTZ, R. T., et al., “Segmentation and Measurement of the Cortex from 3D MR Images”. In: *MICCAI '98: Proceedings of the First International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, pp. 519–530, Springer-Verlag: London, UK, 1998.
- [139] XULI ZONG, ANDREW F. LAINE, E. A. G., “Speckle Reduction and Contrast Enhancement of Echocardiograms via Multiscale Nonlinear Processing”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 17, n. 4, pp. 532–540, August 1998.
- [140] CASELLES, V., KIMMEL, R., SAPIRO, G., et al., “Minimal Surfaces Based Object Segmentation”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 19, n. 4, pp. 394–398, 1997.

- [141] SETHIAN, J. A., “A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of USA*, v. 93, n. 4, pp. 1591–1595, 1996.
- [142] SETHIAN, J. A. ., *A Review of the Theory, Algorithms, and Applications of Level Set Methods for Propagating Interfaces*. Cambridge University Press, 1996.
- [143] DUTT, V., GREENLEAF, J. F., “On the statistical characteristics of log-compressed Rayleigh signals: Theoretical formulation and experimental results”, *IEEE Transactions Medical Imaging*, v. 15, pp. 802–813, December 1996.
- [144] EVANS, A., NIXON, M., “Biased motion-adaptive temporal filtering for speckle reduction in echocardiography”, *IEEE Transactions on Medical Imaging*, v. 15, n. 1, pp. 39–50, 1996.
- [145] ZHAO, H.-K., CHAN, T., MERRIMAN, B., et al., “A variational level set approach to multiphase motion”, *J. Comput. Phys.*, v. 127, n. 1, pp. 179–195, 1996.
- [146] KAPLAN, D., MA, Q., “On the statistical characteristics of log-compressed Rayleigh signals: Theoretical formulation and experimental results”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, v. 95, n. 3, pp. 1396–1400, 1994.
- [147] ADAMS, R., BISCHOF, L., “Seeded Region Growing”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, v. 16, n. 6, pp. 641–647, 1994.
- [148] SAPIRO, G., KIMMEL, R., SHAKED, D., et al., “Implementing continuous-scale morphology via curve evolution.” *Pattern Recognition*, v. 26, n. 9, pp. 1363–1372, 1993.
- [149] COHEN, L. D., “On Active Contour Models and Balloons”, *CVGIP:Image Understanding*, v. 53, n. 2, pp. 211–218, March 1991.
- [150] G. CASTELLINI, D. LAMATE, L. M. E. M., ROCCHI, S., “An adaptive Kalman filter for speckle reduction in ultrasound images”, *J. Nucl. Med. Appl. Sci.*, v. 32, n. 3, pp. 213, 1988.

- [151] SETHIAN, J. A., “Numerical methods for propagation fronts, in variational methods for free surface interfaces”, *Journal of Computational Physics*, 1987.
- [152] BAMBER, J. C., DAFT, C., “Adaptiv filtering for reduction of speckle in ultrasonic pulse-echo images”, *Ultrasonic Imag.*, pp. 41–44, January 1986.
- [153] MUMFORD, D., SHAH, J., “Boundary detection by minimizing functional”. In: *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pp. 22–26, San Francisco, CA, USA, 1985.
- [154] R. F. WAGNER, S. W. SMITH, J. M. S., LOPEZ, H., “Statistics of speckle in ultrasound B-scans”, *IEEE Transactions Sonics Ultrasonics*, v. 30, pp. 156–163, March 1983.
- [155] T.WELLS, P. N., HALLIWELL, M., “Speckle in ultrasonic imaging”, *Ultrasonics*, v. 19, pp. 225–229, 1981.
- [156] VEMURI, V. R., KARPLUS, W. J., *Digital Computer Treatment of Partial Differential Equations*. Prentice Hall Professional Technical Reference, 1981.
- [157] SUETENS, P., *Fundamentals of Medical Imaging*. Cambridge University Press, 2002.