



COPPE/UFRJ

GERAÇÃO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS PARA APLICAÇÕES  
INDUSTRIAIS

Flávio Pereira Nascimento

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Paulo Roma Cavalcanti

Rio de Janeiro

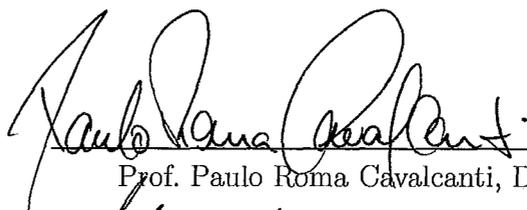
Março de 2009

GERAÇÃO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS PARA APLICAÇÕES  
INDUSTRIAIS

Flávio Pereira Nascimento

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO  
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE  
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE  
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



---

Prof. Paulo Roma Cavalcanti, D.Sc.



---

Prof. Claudio Esperança, Ph.D.



---

Prof. Sebastião Cesar Assis Pereira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2009

Nascimento, Flávio Pereira

Geração de Malhas Não-Estruturadas para Aplicações Industriais/Flávio Pereira Nascimento. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

XVI, 70 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Paulo Roma Cavalcanti

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 66 – 70.

1. Triangulação de Delaunay. 2. Triangulações Restritas. 3. Malhas Não-Estruturadas. 4. Geometria Computacional. 5. CGAL. 6. Qualidade de Malhas. I. Cavalcanti, Paulo Roma. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*A todos aqueles que eu amo, ou  
amei, e que me fizeram uma  
pessoa melhor.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha família por todo amor por toda vida.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## GERAÇÃO DE MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS PARA APLICAÇÕES INDUSTRIAIS

Flávio Pereira Nascimento

Março/2009

Orientador: Paulo Roma Cavalcanti

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho apresenta um processo para geração de malhas tetraédricas que contenham as restrições de modelos de entrada tridimensionais. Estas restrições compreendem as arestas e faces destes modelos. Desenvolvido para aplicações industriais, esse processo tem a robustez como principal consideração. A partir de uma triangulação de Delaunay 3D não-restrita, pontos de Steiner são inseridos para forçar a presença das arestas e faces da restrição nesta triangulação. A inserção desses pontos tenta minimizar o uso de operações geométricas que possam comprometer a robustez do processo, como o cálculo de intersecções. Este tipo de operação apenas é realizado em faces da restrição que não podem ser recuperadas pela inserção de pontos de Steiner. Nestes casos, pequenas retriangulações locais são realizadas de modo a garantir que todas as faces de restrição estejam presentes na triangulação. Essa abordagem, que prioriza a robustez, permite a geração de malhas de domínios tridimensionais arbitrariamente complexos. A implementação desse processo foi realizada utilizando a biblioteca de geometria computacional CGAL. Alguns detalhes sobre a implementação também são apresentados. Este trabalho contém ainda uma discussão sobre qualidade de malhas tetraédricas, assim como apresenta técnicas de aprimoramento das triangulações.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## NON-STRUCTURED MESH GENERATION FOR INDUSTRIAL APPLICATIONS

Flávio Pereira Nascimento

March/2009

Advisor: Paulo Roma Cavalcanti

Department: Systems Engineering and Computer Science

This work presents a constrained tetrahedral mesh generation process for input 3D models. The constraints are the edges and faces of these models. Developed for industrial applications, this process has the robustness as its main consideration. Steiner points are inserted in order to force the presence of constraining edges and faces on an unconstrained Delaunay triangulation. The insertion of these points tries to minimize the use of geometrical operations that could compromise the robustness of the entire process, such as intersections. This sort of operation is only used on constraining faces that cannot be recovered only by inserting Steiner points. In these cases, small local triangulations are performed in order to guarantee the presence of all constraining faces on the triangulation. This robustness approach allowed the generation of tetrahedral meshes for arbitrarily complex 3D domains. The implementation of this process was done by using the computational geometry library CGAL. A few details on this implementation are also presented. This work contains a discussion on mesh quality and presents some mesh refinement techniques.

# Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xvi
<b>1</b> Introdução	<b>1</b>
<b>2</b> Trabalhos Relacionados	<b>4</b>
2.1 Modelos Sísmicos . . . . .	4
2.1.1 Métodos Sísmicos . . . . .	6
2.1.2 Malhas Estruturadas e Não-Estruturadas . . . . .	9
2.2 Computando Triangulações de Delaunay . . . . .	10
<b>3</b> Triangulação 3D Restrita	<b>17</b>
3.1 Recuperação de Arestas . . . . .	19
3.2 Recuperação de Faces . . . . .	23
3.2.1 Recuperação de Faces Não Recuperadas . . . . .	26
3.2.2 Operadores locais de retriangulação . . . . .	27
3.3 Classificação dos Simplexos . . . . .	31
<b>4</b> Qualidade da Malha	<b>34</b>
4.1 Suavização . . . . .	36
4.2 Transformações Topológicas . . . . .	37
4.3 Remoção de <i>Slivers</i> . . . . .	38
4.3.1 Pinça de <i>Slivers</i> . . . . .	39
4.4 Aprimoramento da Malha . . . . .	39
4.4.1 Inserção de Ponto . . . . .	41
4.4.2 Agendamento de Operações . . . . .	42

<b>5</b>	<b>Implementação e Resultados</b>	<b>44</b>
5.1	CGAL ( <i>Computational Geometry Algorithms Library</i> ) . . . . .	45
5.1.1	Classe <i>HalfedgeDS_default</i> da biblioteca CGAL . . . . .	46
5.1.2	Classe <i>Delaunay_triangulation_3</i> da biblioteca CGAL . . . . .	46
5.2	Modelo de Entrada . . . . .	48
5.3	Resultados . . . . .	49
5.3.1	Modelo de peça mecânica . . . . .	49
5.3.2	Modelo geológico sintético com domo de sal . . . . .	50
5.3.3	Modelo sintético com falhas geológicas . . . . .	50
5.3.4	Modelo geológico real do Golfo do México . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>64</b>
6.1	Trabalhos Futuros . . . . .	65
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>

# Lista de Figuras

2.1	Exemplo de imagem sísmica. . . . .	5
2.2	Modelo geológico com horizontes e falhas. . . . .	6
2.3	Aquisição de dados sísmicos. . . . .	6
2.4	Tipos de malhas. À esquerda observa-se uma malha estruturada. Ao centro, observa-se uma malha não-estruturada. À direita, observa-se uma malha híbrida. . . . .	9
2.5	Exemplos de triangulações em três dimensões. À esquerda, visualiza-se um único tetraedro. Ao centro, encontra-se a triangulação de uma esfera. À direita, observa-se a triangulação de uma grade. . . . .	11
2.6	Visualização do critério de Delaunay. Neste exemplo bidimensional, é possível observar os círculos vazios que passam pelos três vértices de cada face. No caso tridimensional, deve ser possível observar esferas vazias que passam pelos quatro vértices de cada tetraedro. . . . .	12
2.7	Exemplo tridimensional de um diagrama de Voronoi. . . . .	13
2.8	Exemplo do algoritmo de <i>flip</i> 2D. À esquerda está a triangulação de Delaunay inicial. Ao centro está a triangulação após a inserção de um novo ponto, porém o critério de esferas vazias (círculos vazios em 2D) não é satisfeito. À direita está a triangulação resultante após a operação de <i>flip</i> , agora satisfazendo o critério de Delaunay. . . . .	14
2.9	Visualização das operações de <i>flip</i> em três dimensões. . . . .	15
3.1	Modelo da Vênus de Milo. . . . .	18

3.2	A primeira etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em gerar a triangulação do fecho convexo do modelo de entrada. Neste exemplo, ilustra-se o fecho convexo do modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1). . . . .	19
3.3	A segunda etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em detectar e recuperar as arestas do modelo de entrada que não apareceram na triangulação. As arestas presentes na triangulação estão na cor branca, enquanto as arestas ausentes estão marcadas de azul no modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1). . . . .	20
3.4	A terceira etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em detectar e recuperar as faces do modelo de entrada que não apareceram na triangulação. Estas faces estão marcadas de amarelo no modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1) e podem ser melhor observadas na imagem ampliada à direita. . . . .	21
3.5	A última etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em entalhar a triangulação e classificar os tetraedros da malha. Neste exemplo, o modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1) possui apenas uma região. . . . .	22
3.6	Base do modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1). Observa-se o vértice central de alto grau com diversas arestas formando pequenos ângulos entre si. . . . .	23
3.7	Base da triangulação gerada a partir do modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1). Observa-se o resultado da aplicação de uma esfera protetora ao redor do vértice central. . . . .	24
3.8	Triangulação Tetraedro-Tetraedro. . . . .	27
3.9	Triangulação Tetraedro-Pirâmide. . . . .	28
3.10	Triangulação Tetraedro-Prisma sem inserção de pontos no prisma. . .	29
3.11	Triangulação Tetraedro-Prisma com inserção de pontos no prisma. . .	30
3.12	Triangulação Prisma-Prisma sem inserção de pontos no prisma. . . .	31
3.13	Triangulação Prisma-Prisma com inserção de pontos no prisma. . . .	32

4.1	Exemplos de <i>sliver</i> em diferentes triangulações. No exemplo da esquerda, o critério da esfera vazia (critério de Delaunay) não é satisfeito. Os outros dois exemplos satisfazem este critério, ou seja, são exemplos de triangulações de Delaunay que possuem <i>sliver</i> . . . . .	35
4.2	Exemplo bidimensional de suavização. Observa-se que o vértice suavizado deve permanecer na região cinza para evitar problemas de topologia (conectividade) na malha. . . . .	37
4.3	Exemplos de transformações topológicas usadas em aprimoramento de malhas. . . . .	38
4.4	Exemplo de inserção de uma grade de pontos. À esquerda, observa-se a inserção de pontos nas arestas de uma face. No centro, pontos foram inseridos no interior de uma face. À direita, ilustra-se uma secção plana em um modelo com múltiplas regiões e os pontos inseridos no seu interior. . . . .	40
4.5	Visão frontal ao plano de corte da triangulação de um modelo com múltiplas regiões ao inserir uma grade de pontos. Observa-se certa regularidade dos tetraedros no interior da malha. . . . .	40
4.6	Inserção de ponto. Neste caso bidimensional, à esquerda observa-se o grafo de visibilidade a partir do novo ponto inserido ponto $p$ , enquanto à direita observa-se a cavidade (em rosa) calculada a partir desse grafo.	41
5.1	Representação de um tetraedro na estrutura de triangulação da biblioteca CGAL. Apenas os quatro vértices do tetraedro e seus quatro vizinhos são armazenados. . . . .	47
5.2	Representação da conectividade entre tetraedros na estrutura de triangulação da biblioteca CGAL. As informações de arestas e faces são obtidas a partir da informação de vizinhança entre os tetraedros. . . .	47
5.3	Representação do vértice infinito em uma malha com apenas um tetraedro. . . . .	48
5.4	Modelo de uma peça mecânica. . . . .	50
5.5	Duas triangulações da peça mecânica. À esquerda, a triangulação sem uso de grades. À direita, a triangulação utilizando uma grade hexagonal. . . . .	51

5.6	Tetraedros indesejáveis da peça mecânica. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada sem uso grades. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha. . . . .	51
5.7	Histogramas dos ângulos diédricos da peça mecânica. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso grades. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha. . . . .	52
5.8	Modelo geológico sintético com domo de sal. . . . .	53
5.9	Duas triangulações do modelo geológico sintético com domo de sal. À esquerda, a triangulação gerada usando uma grade cristalizada. À direita, a triangulação utilizando uma grade hexagonal. . . . .	54
5.10	Tetraedros indesejáveis do modelo geológico sintético com domo de sal. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada usando uma grade cristalizada. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação gerada usando uma grade cristalizada após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha. . . . .	55

5.11	Histogramas dos ângulos diédricos do modelo geológico sintético com domo de sal. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada usando uma grade cristalizada. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação usando uma grade cristalizada após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha. . . . .	56
5.12	Modelo geológico sintético com falhas geológicas. . . . .	57
5.13	Duas triangulações do modelo geológico sintético com falhas geológicas. À esquerda, a triangulação gerada sem uso de grades. À direita, a triangulação utilizando uma grade cúbica. . . . .	57
5.14	Histogramas dos ângulos diédricos do modelo geológico sintético com falhas geológicas. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha. . . . .	58
5.15	Tetraedros indesejáveis do modelo geológico sintético com falhas geológicas. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha. . . . .	59
5.16	Modelo geológico real do Golfo do México. . . . .	60
5.17	Diferentes visualizações do modelo do Golfo do México. . . . .	61

5.18	Três triangulações do modelo do Golfo do México. À esquerda, a triangulação gerada sem uso de grades. No centro, a triangulação utilizando uma grade cúbica. À direita, a triangulação utilizando uma grade hexagonal. . . . .	61
5.19	Tetraedros indesejáveis do modelo do Golfo do México. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. Na parte superior central, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica. Na parte inferior central, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha. . . . .	62
5.20	Histogramas dos ângulos diédricos do modelo do Golfo do México. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. Na parte superior central, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica. Na parte inferior central, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha. . . . .	63

# Lista de Tabelas

5.1	Dados das triangulações da peça mecânica. . . . .	50
5.2	Dados do aprimoramento das triangulações da peça mecânica. . . . .	52
5.3	Dados das triangulações do modelo com domo de sal. . . . .	52
5.4	Dados do aprimoramento das triangulações do modelo com domo de sal. . . . .	52
5.5	Dados das triangulações do modelo com falhas geológicas. . . . .	53
5.6	Dados do aprimoramento das triangulações do modelo com falhas geológicas. . . . .	54
5.7	Dados das triangulações do modelo do Golfo do México. . . . .	54
5.8	Dados do aprimoramento das triangulações do modelo do Golfo do México. . . . .	57

# Capítulo 1

## Introdução

A geração automática de malhas não-estruturadas de objetos tridimensionais é essencial em diversas áreas de ciências aplicadas, tais como Análise de Elementos Finitos, Computação Gráfica, Biomecânica etc. A geração automática de malhas é indispensável por razões de produtividade; são necessárias grandes quantidades de tempo e esforço para gerar malhas por qualquer técnica que não seja completamente automatizada [1].

O problema para a geração automática de malhas é criar uma malha que represente objetos tridimensionais limitados por faces poligonais e, possivelmente, com arestas e faces em seu interior. Algoritmos para a geração de malhas têm sido tópicos de pesquisa ao longo das duas últimas décadas. Três principais famílias de algoritmos são descritas na literatura: métodos baseados em *Octree* [1, 2]; métodos baseados em triangulações de Delaunay [3, 4, 5, 6]; e métodos de Avanço de Fronteira [7, 8, 9, 10]. Uma boa amostra destes métodos pode ser encontrada em OWEN [11].

Diferente do caso bidimensional, triangulações de Delaunay tridimensionais não possuem a propriedade de maximizar o menor ângulo. De qualquer forma, essas triangulações são bastante atrativas a partir de um ponto de vista de robustez, devido à simplicidade do critério de Delaunay e porque requerem apenas dois predicados. Além disso, a qualidade das triangulações de Delaunay pode ser aprimorada por diversas transformações locais na malha [12].

A geração de triangulações de Delaunay não-restritas é trivial [3, 13]. Porém, a aplicação de algoritmos para gerar triangulações 3D que preservem restrições de

fronteira, externa e interna, é complexa. Além da complexidade, geralmente a implementação desses algoritmos apresenta problemas de robustez quando submetidas a aplicações industriais. Isto ocorre devido à precisão finita da representação numérica em ponto flutuante e seus associados erros de arredondamento, os quais podem, em alguns casos, fazer com que a implementação aborte, fique presa em laços infinitos ou produza malhas inválidas.

Para propósitos industriais, um gerador de malhas deve ser capaz de manipular milhares de polígonos que descrevem a fronteira restrita do modelo de entrada. Espera-se também que a malha seja válida e gerada em um tempo razoável. Além disso, não deve haver qualquer restrição em relação ao posicionamento dos pontos do modelo de entrada; exige-se apenas a consistência topológica dos polígonos que definem sua fronteira.

O objetivo deste trabalho é apresentar e discutir um processo que usa técnicas conhecidas de produção de malhas baseadas em triangulações de Delaunay e que honra a geometria da fronteira do modelo de entrada [14]. Este processo produz malhas válidas e requer apenas a consistência topológica dos polígonos que definem a fronteira do modelo. Outra meta deste trabalho é implementar um gerador de malhas restritas, baseado nesse processo, que realize também operações na malha de modo a aprimorar a qualidade dos seus tetraedros.

Um pré-requisito para geração automática de malhas é a robustez, que depende diretamente do tipo de operações geométricas necessárias para gerar a malha. Na literatura, dois métodos intensamente dependentes de intersecções foram apresentados para gerar triangulações de Delaunay restritas [15, 16]. Neste trabalho, intersecções são utilizadas apenas para recuperar faces da restrição ausentes da malha após a inserção de pontos de Steiner na etapa de recuperação de faces restritas. Em diversos casos, obtêm-se malhas conformes sem o cálculo de qualquer intersecção e usando apenas os dois predicados da construção da triangulação de Delaunay.

O segundo capítulo apresenta uma discussão mais elaborada sobre métodos de criação de triangulações de Delaunay. O terceiro capítulo aborda o processo de geração da triangulação restrita de um objeto tridimensional a partir da triangulação de Delaunay do seu fecho convexo. Isto é, são apresentados os métodos utilizados para: recuperação de arestas da restrição, recuperação de faces da restrição e clas-

sificação dos simplexes. O quarto capítulo traz uma discussão sobre qualidade da malha e apresenta operações e métodos que visam seu aprimoramento. Detalhes da implementação do gerador de malhas restritas, utilizando a biblioteca CGAL (*Computational Geometry Algorithms Library*), e os resultados obtidos são mostrados no Capítulo 5. O sexto capítulo traz as conclusões e idéias para desenvolvimento de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Trabalhos Relacionados

Simulações numéricas para aplicações industriais, por exemplo, para a exploração de petróleo, necessitam de malhas para discretizar o domínio. Em simulação de reservatórios, o estudo de propagação de ondas acústicas ou fluxos de calor e fluido em larga escala dentro de sedimentos porosos saturados são processos importantes na determinação da viabilidade econômica da exploração da reserva. O método de geração de malhas visa atender às necessidades dos modelos utilizados por essas aplicações. Portanto, este caráter interdisciplinar torna necessária a apresentação de conceitos básicos de métodos sísmicos para melhor compreensão dos problemas relacionados a essa categoria de aplicação.

### 2.1 Modelos Sísmicos

O conhecimento da composição do subsolo é fundamental para a tomada de decisão da indústria petrolífera. As simulações de processos geológicos complexos são feitas para ajudar na tomada de decisão, pois, tanto na exploração como na produção, os resultados de simulações de reservatórios e/ou de bacias são utilizados.

As principais fontes de informação de dados subterrâneos são os poços e a interpretação da resposta acústica a ondas sísmicas geradas por explosivos, ar comprimido, queda de pesos ou vibradores. No entanto, esses dados são limitados por natureza e não fornecem uma quantidade ideal de informações para a montagem dos modelos geológicos.

Logo após a aquisição dos dados sísmicos e o processamento para remoção de

ruídos desses dados, a sismica é modelada matematicamente como um campo escalar tridimensional e pode ser visualizada como uma imagem sísmica, como o exemplo ilustrado da Figura 2.1.



Figura 2.1: Exemplo de imagem sísmica.

O modo tradicional é usar o conhecimento de geólogos e geofísicos para fazer a interpretação geológica dessas imagens sísmicas. O resultado disso é um conjunto de curvas e superfícies que são utilizadas na construção de um modelo geológico consistente, tanto geometricamente quanto topologicamente. O próximo passo é usar esse modelo geométrico intermediário para gerar malhas discretas que poderão ser utilizadas em diversas simulações numéricas. Este modelo geológico deve representar todas as características de interesse, como os horizontes, que representam as superfícies de separação entre camadas geológicas, e as falhas, que são descontinuidades causadas por deslizamento de camadas, conforme podem ser vistos na Figura 2.2. Os horizontes e falhas dividem o modelo geológico em um conjunto de regiões do espaço cuja união forma as camadas do modelo.

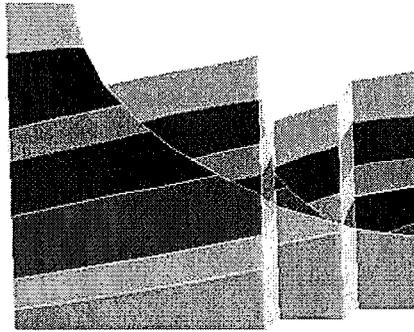


Figura 2.2: Modelo geológico com horizontes e falhas.

### 2.1.1 Métodos Sísmicos

O método sísmico de reflexão fornece boa definição das características geológicas em subsuperfície propícia à acumulação de hidrocarbonetos. Os produtos finais são, entre outros, imagens das estruturas e camadas geológicas em subsuperfície, apresentadas sob as mais diversas formas, que são disponibilizadas para o trabalho dos intérpretes.

O levantamento sísmico inicia com a geração, através de fontes artificiais, de ondas elásticas que se propagam pelo interior da Terra. Estas ondas são refletidas e refratadas nas interfaces que separam as rochas de diferentes constituições petrofísicas e retornam à superfície, onde são captadas por sofisticados equipamentos de registro (Figura 2.3).

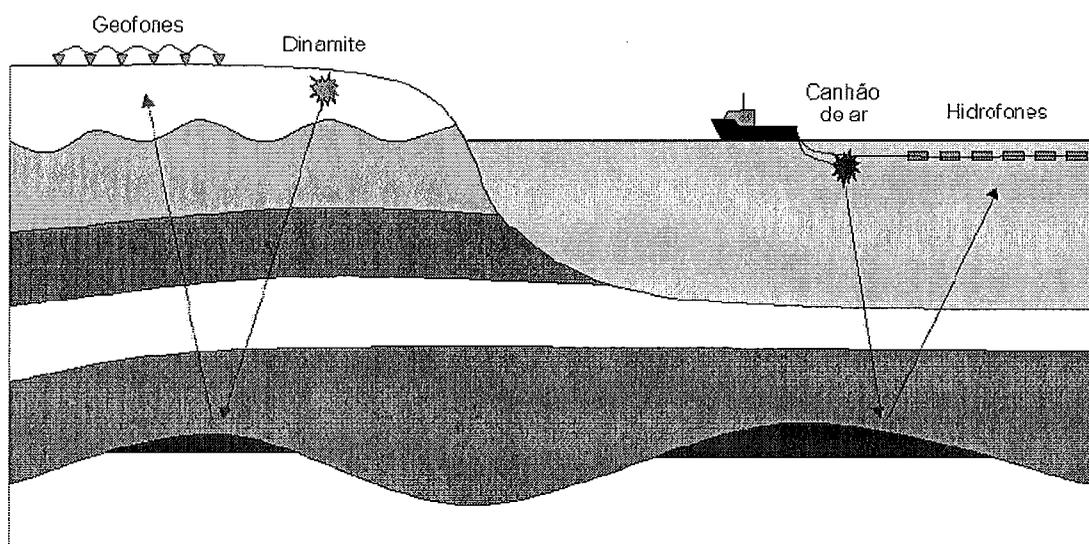


Figura 2.3: Aquisição de dados sísmicos.

De acordo com ROBINSON e TREITEL [17] a exploração de hidrocarbonetos, óleo e gás baseada em sísmica pode ser dividida em três etapas: aquisição, processamento e interpretação.

### **Fontes e Receptores Sísmicos**

As fontes de energia sísmica mais utilizadas são: a dinamite e o vibrador, em terra; e canhões de ar comprimido, em levantamento marítimo. Cada uma destas fontes emite um pulso característico, conhecido como assinatura da fonte, que se propaga em todas as direções. Estes pulsos elásticos, ou detonações, são de duração ou comprimento muito pequeno e se refletem e refratam em cada uma das camadas geológicas em profundidade, retornando à superfície. Os receptores utilizados para registrar as reflexões destes pulsos são basicamente de dois tipos: eletromagnéticos (geofones), para registros em terra; e de pressão (hidrofonos), para levantamento marítimo.

### **Aquisição**

Tanto na terra quanto no mar, a aquisição de dados sísmicos consiste na geração de uma perturbação mecânica em um ponto da superfície e o registro das reflexões em centenas de canais de recepção ao longo de uma linha reta. Todo o conjunto fonte/receptores tem seu posicionamento dinâmico definido por levantamentos topográficos, em terra, e por radioposicionamento e satélites, no mar.

Assim como na fotografia convencional ou na transmissão de imagens de televisão, a aquisição de dados sísmicos de reflexão leva em consideração uma série de parâmetros que visam a obtenção de imagens de boa qualidade da subsuperfície, dentro dos limites de economicidade. Em função do detalhe necessário aos objetivos do levantamento sísmico, critérios como resolução vertical e horizontal, distorções, atenuação de ruídos, profundidade de interesse, entre outros, são devidamente equacionados no projeto.

### **Processamento**

No processamento dos dados sísmicos, alguns erros inerentes ao levantamento sísmico são corrigidos e os dados são reorganizados para formarem uma grade tridimensi-

onal com uma amostra de amplitude sísmica em cada vértice da grade. Duas das dimensões do conjunto de dados são direções espaciais e estão relacionadas com as posições das fontes e dos receptores. Uma das transformações realizadas nos dados, durante o processamento, faz com que as posições da fonte e do receptor sejam a mesma, formando uma linha vertical. Uma vez encontrada essa linha, as amostras são obtidas medindo o tempo que a onda leva para ir e voltar por cada intervalo de profundidade. Cada linha vertical é denominada como traço sísmico e será usada para formar uma coluna da grade tridimensional. Sendo assim, a grade tridimensional possui duas dimensões espaciais, conhecidas como *inline* e *crossline*, produtos do descolamento das fontes e receptores numa área determinada, além de possuir uma dimensão temporal.

### Interpretação

Nesta última etapa, o intérprete, em geral um geólogo ou geofísico, analisa os dados sísmicos e busca criar um modelo que represente a geologia contida na área do levantamento. A interpretação sísmica é usualmente classificada, de acordo com o foco, em dois tipos: estratigráfica ou estrutural. Na interpretação estratigráfica o foco está em estudar a maneira como as camadas se comportaram ao longo do tempo. A interpretação estrutural está relacionada à identificação das camadas geológicas, normalmente um conjunto de curvas e superfícies, como visto na Figura 2.2. Estas curvas e superfícies são a representação dos horizontes e das falhas.

Baseado nesta etapa de interpretação, um modelo intermediário é gerado através da intersecção de uma grade regular bastante refinada com as curvas e superfícies determinadas pelo intérprete da sísmica. O próximo passo é usar um algoritmo de decimação que reduza a quantidade de pontos e crie superfícies trianguladas baseado em algum critério de minimização de erro. O GOCAD (*Geological Object Computer Aided Design*) [18] é uma ferramenta usualmente utilizada neste processo. No final desta etapa, as regiões tridimensionais delimitadas pelo conjunto de horizontes e falhas são determinadas por algum modelador geométrico. Finalmente, são atribuídas propriedades geológicas às superfícies e às regiões do modelo, para que a malha final possua elementos com propriedades correspondentes aos atributos geológicos.

### 2.1.2 Malhas Estruturadas e Não-Estruturadas

Uma malha pode ser definida como uma discretização de um domínio em formas geométricas simples, tais como triângulos ou quadriláteros em 2D e tetraedros ou hexaedros em 3D. Geralmente, as malhas são classificadas como: estruturadas, não-estruturadas e híbridas. Um modo comum de diferenciá-las é quanto à topologia da vizinhança dos elementos. Malhas estruturadas são caracterizadas por seus nós internos possuírem número constante de elementos adjacentes. Malhas não-estruturadas possuem nós internos com números de elementos adjacentes variável. Malhas híbridas, por serem o resultado de combinações entre malhas estruturadas e não-estruturadas, não possuem características bem definidas. A Figura 2.4 ilustra os três tipos de malhas em duas dimensões.

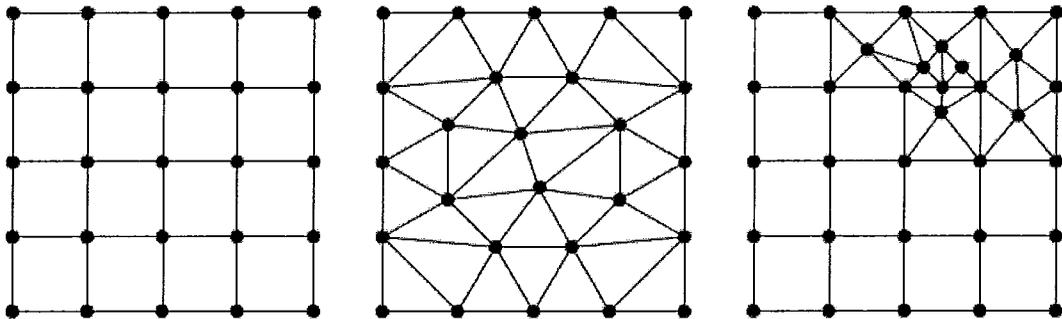


Figura 2.4: Tipos de malhas. À esquerda observa-se uma malha estruturada. Ao centro, observa-se uma malha não-estruturada. À direita, observa-se uma malha híbrida.

As malhas estruturadas discretizam o domínio em elementos que possuem conectividade implícita, ou seja, a coordenada de um nó é suficiente para obter todas as relações de conectividade existentes, podendo acelerar o processo de consulta. Por outro lado, as relações de conectividade das malhas não-estruturadas são adquiridas explicitamente sob a forma de tabelas de conectividade. A obtenção de relações de conectividade em malhas híbridas depende de qual combinação de malhas estas resultam.

A escolha do tipo de malha adequada está diretamente relacionado à complexidade do problema. O uso de malhas estruturadas são preferidas em domínios simples. Por outro lado, as malhas não-estruturadas são apropriadas em domínios

de complexidade arbitrária, pois se conformam melhor ao contorno. Estas também permitem a aplicação de refinamento local e adaptativo. Vários métodos de discretização, tais como Diferenças Finitas, Volumes Finitos e Elementos Finitos utilizam malhas não-estruturadas.

O processo de aquisição de dados e geração dos modelos para aplicações de Geociências produz superfícies com faces poligonais que possuem características singulares, tais como distribuição dos pontos desigual ao longo dos eixos cartesianos e ângulos pequenos entre as faces do modelo. Estas características resultam em grande dificuldade no processo de geração de malhas para esses modelos, principalmente para métodos baseados em *Octree* [1, 2] e métodos de Avanço de Fronteira [7, 8, 9, 10]. Este trabalho faz uso de triangulações de Delaunay para triangular o fecho convexo do conjunto de pontos do modelo e, a partir do conjunto de faces poligonais que definem suas fronteiras, forçar o aparecimento das arestas e das faces ausentes da triangulação, conforme apresentado no Capítulo 3.

## 2.2 Computando Triangulações de Delaunay

Em  $n$  dimensões, a triangulação de um conjunto de pontos  $V$  é o conjunto de simplexos que não se interceptam  $T(V)$ , cujos vértices formam  $V$  e cuja união de todos os seus simplexos preenche completamente o fecho convexo de  $V$ . Simplexos de dimensão três são chamados tetraedros, cujas faces são simplexos de dimensão dois (triângulos), arestas são simplexos de dimensão um (segmentos de reta) e vértices são simplexos de dimensão zero (pontos).

Existem muitas maneiras de se triangular o conjunto de pontos  $V$  e a triangulação de Delaunay é aquela em que, para qualquer simplexo de  $T(V)$ , existe uma esfera  $n$ -dimensional vazia que passa por seus vértices. Diz-se que uma esfera está vazia se não há vértices em seu interior. Uma triangulação de Delaunay é única, se e somente se não existem  $(n + 2)$  vértices coesféricos no conjunto  $V$ .

Uma triangulação de Delaunay tridimensional restrita de um conjunto  $F$  de polígonos planares simples é a triangulação na qual  $V$  é o conjunto de vértices de  $F$  e qualquer polígono é obtido como a união de faces de  $T(V)$ .

Triangulações de Delaunay podem ser construídas reduzindo todas as operações

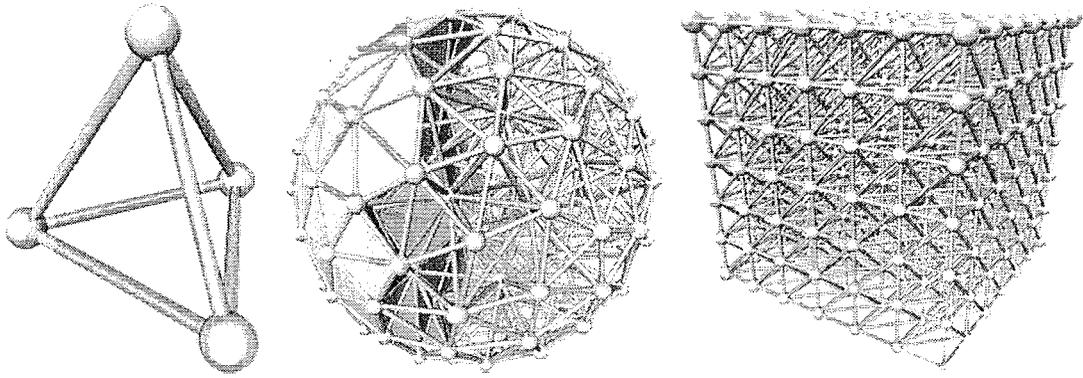


Figura 2.5: Exemplos de triangulações em três dimensões. À esquerda, visualiza-se um único tetraedro. Ao centro, encontra-se a triangulação de uma esfera. À direita, observa-se a triangulação de uma grade.

geométricas a apenas dois predicados:

- P1 - Teste de ponto na esfera.
- P2 - Localização de um ponto em relação a um plano e seus dois semi-espacos associados.

Essa redução é um passo importante para minimizar os erros associados à precisão finita dos computadores que afetam diretamente a robustez do processo de geração de malhas. Uma discussão detalhada de uma implementação robusta adaptativa, baseada em aritmética exata desses predicados, é apresentada por SHEWCHUK [6].

O algoritmo tradicional de geração de triangulações de Delaunay não-restritas usa apenas conjuntos de pontos e, por isso, não há garantias de que faces da fronteira do objeto estejam presentes na triangulação de seu fecho convexo. Isto ocorre se existe um conjunto de faces que não aparecem em nenhuma triangulação dos pontos de entrada [15]. Todavia, um gerador de malhas não-restritas pode ser utilizado como ponto de partida para a implementação de um gerador de malhas restritas. Isto é normalmente alcançado adicionando pontos extras (pontos de Steiner) à triangulação nas arestas e faces ausentes ou, em alguns casos, realizando operações de *flip* nas faces dos tetraedros da malha inicial. Estas operações de *flip* são apresentadas posteriormente.

Triangulações de Delaunay bidimensionais restritas são consideradas um pro-

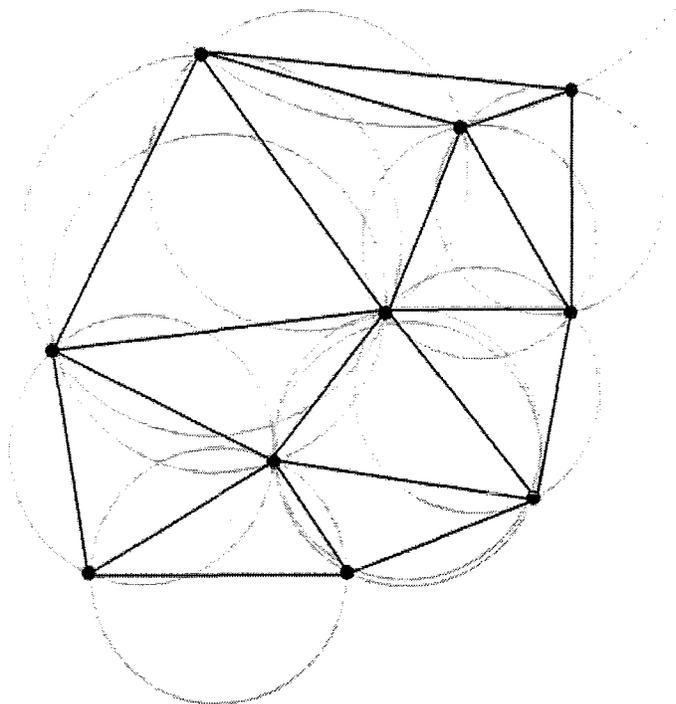


Figura 2.6: Visualização do critério de Delaunay. Neste exemplo bidimensional, é possível observar os círculos vazios que passam pelos três vértices de cada face. No caso tridimensional, deve ser possível observar esferas vazias que passam pelos quatro vértices de cada tetraedro.

blema fechado [19], mas, em três dimensões, há ainda muitas questões a serem resolvidas. Apesar de ser sempre possível produzir uma triangulação restrita de um domínio 2D qualquer sem a inserção de pontos de Steiner, isto não é verdade para o caso tridimensional. Este é o principal fator que impede a simples generalização dos algoritmos 2D para 3D.

Os primeiros algoritmos incrementais para computar triangulações de Delaunay  $n$ -dimensionais são descritos em WATSON [3] e em BOWYER [13]. Estes algoritmos baseiam-se no fato de que escolher os  $(n + 1)$  pontos que se localizam nas esferas  $n$ -dimensionais vazias, para definir simplexos  $n$ -dimensionais, garante o aparecimento de vértices de Voronoi (circuncentros das esferas) no diagrama de Voronoi dual. Além disso, esses  $(n + 1)$  pontos formam um cluster mínimo de dados que são imediatamente adjacentes.

O algoritmo incremental [3] adiciona um ponto por vez à triangulação, a qual

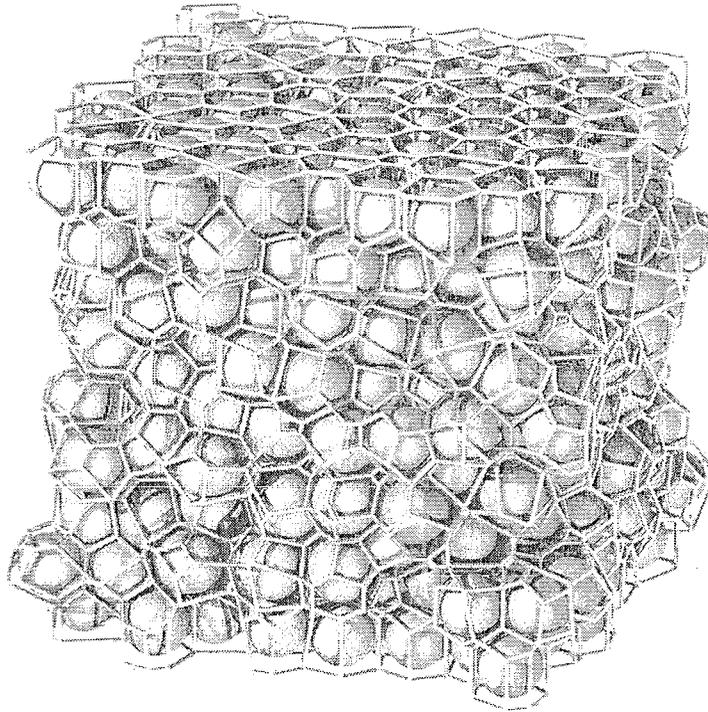


Figura 2.7: Exemplo tridimensional de um diagrama de Voronoi.

inicialmente possui um único simplexo  $n$ -dimensional grande o suficiente para englobar todos os pontos do conjunto  $V$ . Esse algoritmo é genericamente conhecido como algoritmo de cavidade, uma vez que ele remove todos os simplexos  $n$ -dimensionais que não são mais vazios após a inserção do novo ponto. Estes simplexos removidos formam uma cavidade poliedral que engloba este novo ponto inserido. A cavidade é triangulada conectando o ponto inserido a todos os vértices na fronteira da cavidade. Para evitar inconsistências estruturais, a cavidade precisa ser estrelada [20], satisfazendo a condição de convexidade em relação ao ponto. Esta condição é facilmente adicionada ao algoritmo de cavidade fazendo com que a seguinte relação seja atendida:

$$n_i \cdot (p - x_i) > 0.0, \quad (2.1)$$

onde  $n_i$  é o vetor normal à  $i$ -ésima face da cavidade,  $x_i$  é qualquer ponto na  $i$ -ésima face e  $p$  é a posição do ponto inserido. Quando uma face da cavidade não é estritamente convexa em relação ao ponto, o simplexo ao qual ela está conectada é removido, formando uma cavidade ainda maior.

Analisando o diagrama de Voronoi correspondente, percebe-se que nenhum

vértice é desconectado durante este processo. Contudo, deve-se ter cuidado, pois ao usar tolerâncias no lado direito da desigualdade 2.1, no lugar de 0.0, a cavidade produzida pode ser incorreta. A remoção de simplexes pode desconectar um conjunto de vértices ou, até mesmo, uma parte da triangulação, no caso onde o novo ponto inserido localiza-se muito próximo a um vértice ou grupo de vértices já existentes. Por outro lado, comparações com números representados em ponto flutuante geralmente necessitam de tolerâncias. O melhor compromisso é obtido usando o predicado P2.

Uma abordagem alternativa para o algoritmo de cavidade é o algoritmo de *flip* 3D [4, 5], o qual generaliza, para três dimensões, o conhecido algoritmo de *flip* 2D [21]. O algoritmo de *flip* é bastante elegante e tem a vantagem de manter uma triangulação a todo o momento. Contudo, esse algoritmo é mais complexo de implementar. O algoritmo de *flip* 3D baseia-se no fato de que há apenas duas maneiras de se triangular um hexaedro convexo de cinco pontos: uma com dois e outra com três tetraedros. Uma das duas possíveis triangulações deve ser a triangulação de Delaunay desses cinco pontos. Duas transformações locais alternam entre essas duas triangulações: de dois para três tetraedros (*flip* 2-3) e vice-versa (*flip* 3-2). Uma terceira transformação local é usada quando quatro dos cinco pontos são coplanares (*flip* 4-4).

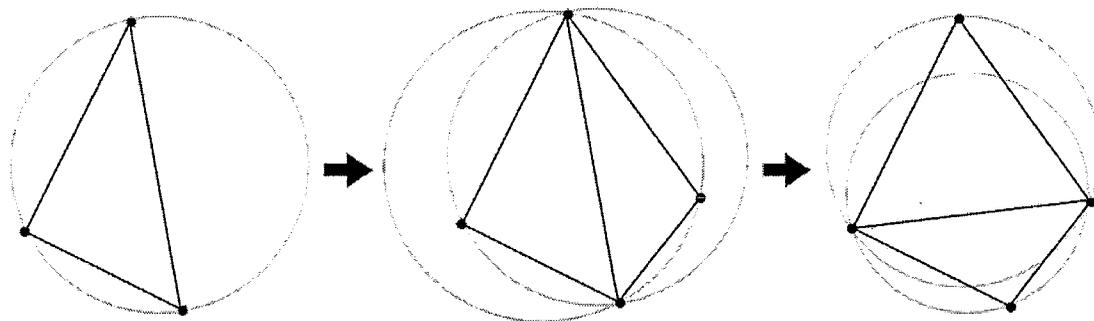


Figura 2.8: Exemplo do algoritmo de *flip* 2D. À esquerda está a triangulação de Delaunay inicial. Ao centro está a triangulação após a inserção de um novo ponto, porém o critério de esferas vazias (círculos vazios em 2D) não é satisfeito. À direita está a triangulação resultante após a operação de *flip*, agora satisfazendo o critério de Delaunay.

No algoritmo de *flip*, o tetraedro que contém o novo ponto inserido  $v$  é retriangulado conectando seus vértices a  $v$ . Se o ponto  $v$  localiza-se em uma face ou em uma

aresta, o procedimento é basicamente o mesmo, mas a retriangulação é um pouco mais complexa. Depois, constrói-se uma lista  $lF$  de todas as faces que, quando conectadas a  $v$ , definem um tetraedro. Essas faces são as candidatas iniciais para o método de *flip*. O teste de ponto em esfera é realizado usando a esfera definida pelos três pontos de uma face  $f$  em  $lF$  e o vértice oposto a  $v$  por  $f$ . Se a esfera contém  $v$ , a face  $f$  é considerada para o *flip*.

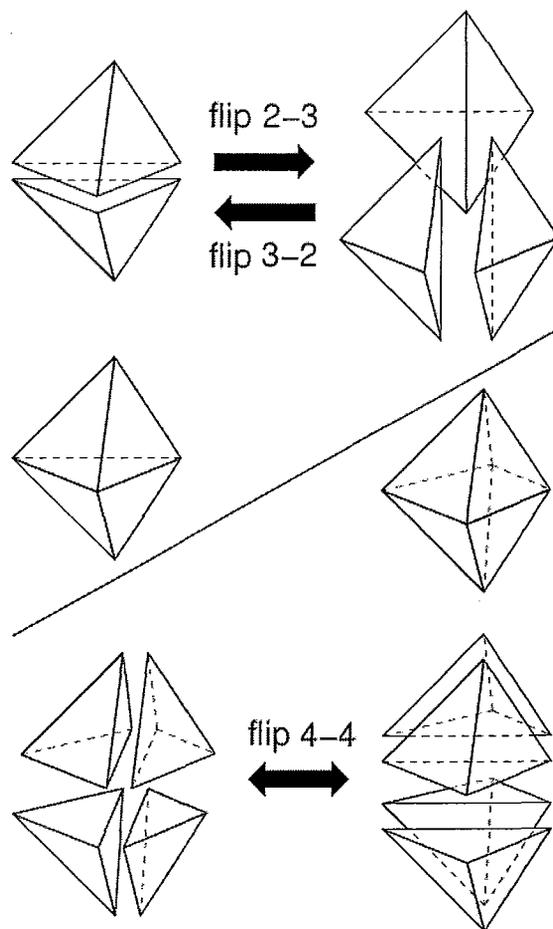


Figura 2.9: Visualização das operações de *flip* em três dimensões.

As precondições para utilizar os três diferentes tipos de *flip* são as seguintes:

- *Flip* 3-2: deve haver uma aresta incidente a  $v$  com exatamente três faces incidentes.
- *Flip* 2-3: os dois tetraedros que compartilham a face  $f$  (um deles incidente a  $v$ ) devem definir um conjunto convexo.

- *Flip* 4-4:  $v$  deve estar no mesmo plano de  $f$  e devem existir quatro faces incidentes à aresta de  $f$  visível por  $v$  (a aresta que será trocada).

Após o *flip*, duas a quatro novas faces são adicionadas a  $lF$  e o processo é repetido até que o conjunto  $lF$  esteja vazio. Note que o *flip* 3-2 é o único que não requer teste geométrico e, por essa razão, deve ser tentado primeiro.

A seqüência de *flips* é completamente arbitrária, mas algumas vezes as precondições para os *flips* não são satisfeitas e a face é considerada não-transformável por *flips*. JOE [4] descreve, em detalhes, as circunstâncias em que todas as faces interiores não localmente ótimas não são transformáveis. Nessas circunstâncias, o algoritmo de *flip* 3D produz uma triangulação Delaunay localmente ótima.

# Capítulo 3

## Triangulação 3D Restrita

Os algoritmos baseados no critério de Delaunay descritos no capítulo anterior são usados para triangular o fecho convexo de um conjunto de pontos de entrada sem qualquer restrição. Quando um conjunto de faces poligonais definindo as fronteiras, interna e externa, de um modelo tem que ser parte da triangulação final, as arestas e faces ausentes devem ser, de alguma maneira, inseridas na triangulação.

O método apresentado neste trabalho gera triangulações tridimensionais restritas em quatro etapas.

- Inicialmente, gera-se a triangulação de Delaunay do fecho convexo dos pontos de entrada.
- Recuperam-se todas as arestas de restrição ausentes, ou seja, as arestas que fazem parte do modelo de entrada que não apareceram na triangulação de Delaunay gerada na primeira etapa.
- Após a recuperação das arestas restritas ausentes, recuperam-se as faces poligonais restritas ausentes.
- Para terminar o processo de geração de malhas restritas, realiza-se uma etapa de classificação dos simplexos, para que a triangulação possua a mesma silhueta do modelo de entrada e os simplexos armazenem informações relativas à região a que pertencem.

Estruturas de dados auxiliares foram utilizadas para manter a consistência entre o modelo de entrada e a triangulação, na implementação deste método. O modelo de

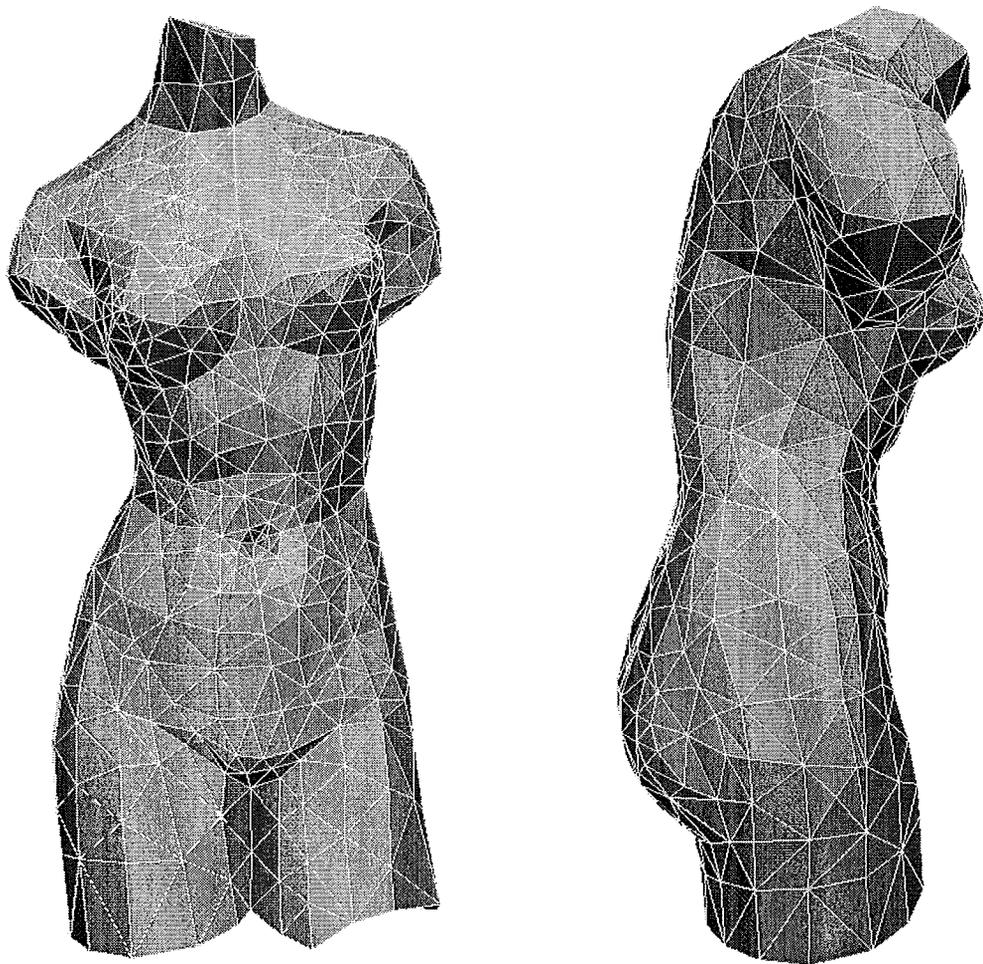


Figura 3.1: Modelo da Vênus de Milo.

entrada é internamente representado por uma estrutura que armazena suas arestas e faces poligonais restritas. Quando um ponto é inserido na triangulação em qualquer etapa, se este ponto se localizar em uma aresta ou face restrita, a estrutura que armazena o modelo também é atualizada. Intuitivamente parece que este tipo de estrutura provoca perda no desempenho, visto que é necessário atualizá-la durante a inserção de pontos em arestas e faces da restrição. Porém, o seu uso é justificado quando se deseja descobrir quais são as arestas e faces da restrição que estão ausentes da triangulação não-restrita, em todas as etapas do processo. Além disso, a sua utilização facilita a implementação de todo o método.

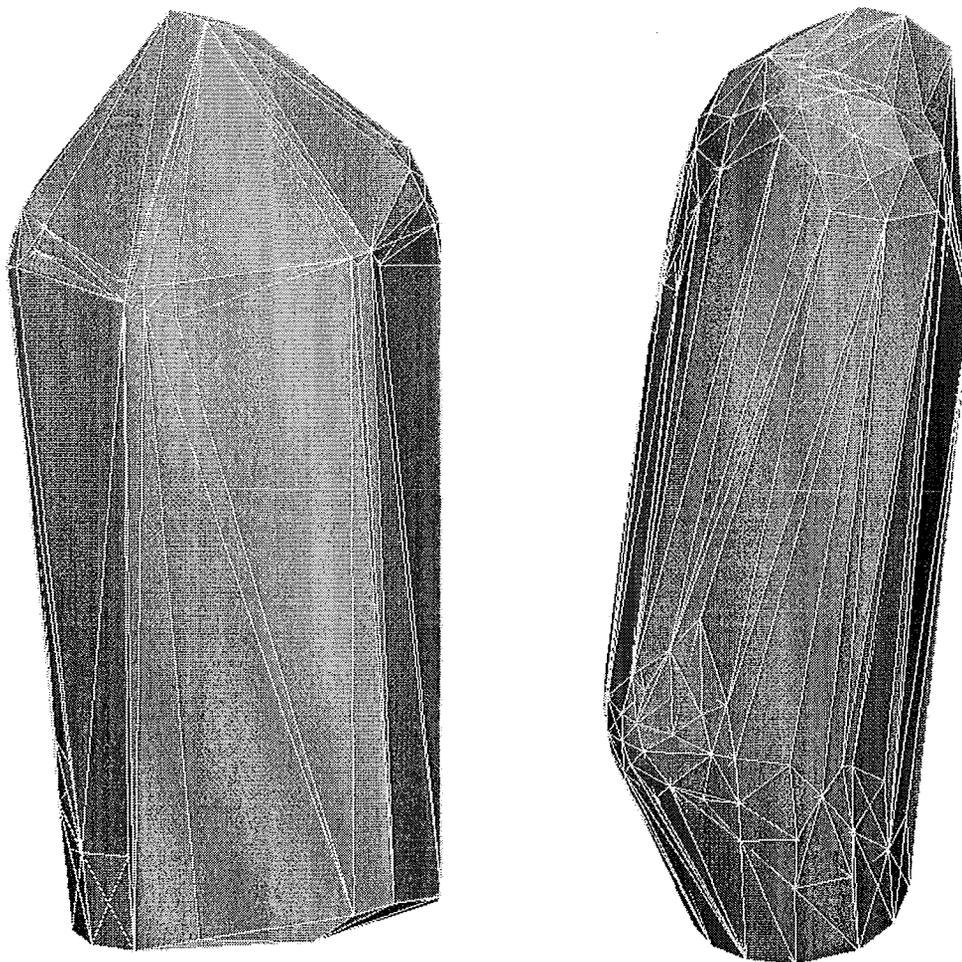


Figura 3.2: A primeira etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em gerar a triangulação do fecho convexo do modelo de entrada. Neste exemplo, ilustra-se o fecho convexo do modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1).

### 3.1 Recuperação de Arestas

Recuperar arestas de restrição ausentes significa verificar quais arestas do modelo de entrada não aparecem na triangulação do fecho convexo de seus pontos e forçar o seu aparecimento.

O processo de recuperação de arestas restritas ausentes que foi utilizado é conhecido por "costura" [22, 16] e, neste processo, um vértice é inserido na triangulação no meio de uma aresta ausente. Este processo de recuperação explora uma propriedade das triangulações de Delaunay: cada vértice da triangulação está conectado ao vértice mais próximo por uma aresta. O processo de inserção de pontos no meio da

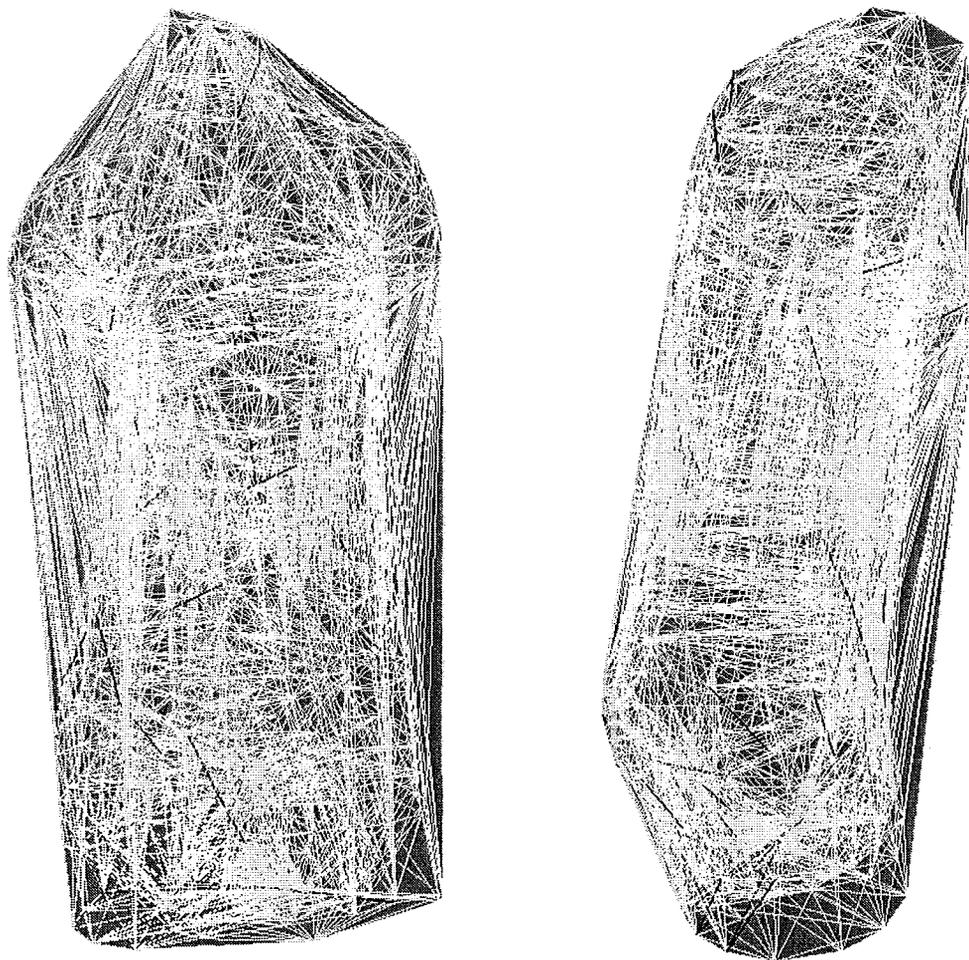


Figura 3.3: A segunda etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em detectar e recuperar as arestas do modelo de entrada que não apareceram na triangulação. As arestas presentes na triangulação estão na cor branca, enquanto as arestas ausentes estão marcadas de azul no modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1).

aresta é repetido recursivamente para cada meio-segmento que permanecer ausente da triangulação. No final deste processo, a aresta de restrição é recuperada como uma coleção de arestas da triangulação.

Cada vértice inserido na triangulação deve também ser inserido na correspondente aresta de fronteira do polígono. Porém, a inserção de um novo vértice pode causar a remoção de uma aresta de restrição anteriormente presente na triangulação. Por isso, uma lista de arestas removidas deve ser mantida. Este processo é repetidamente aplicado até que esta lista esteja vazia. Infelizmente, este processo nem

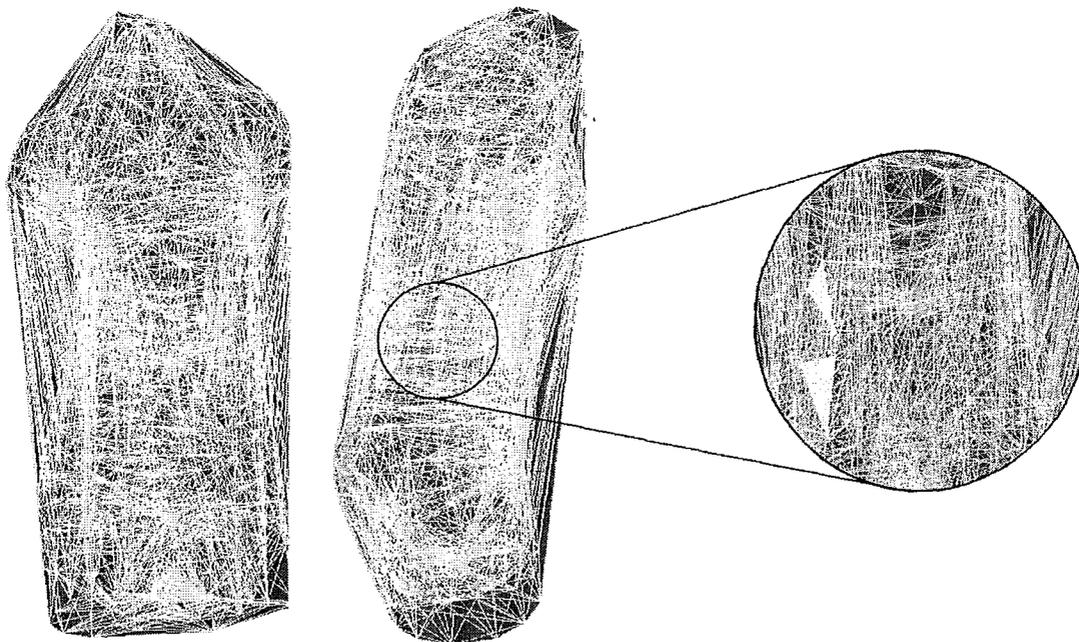


Figura 3.4: A terceira etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em detectar e recuperar as faces do modelo de entrada que não apareceram na triangulação. Estas faces estão marcadas de amarelo no modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1) e podem ser melhor observadas na imagem ampliada à direita.

sempre converge. Duas arestas de restrição com diferentes comprimentos, incidentes a um vértice de grau elevado e formando um ângulo menor que  $60^\circ$  podem levar a uma espiral de exclusão mútua e redução de comprimento, uma vez que pode haver interação entre todas as arestas de restrição incidentes ao mesmo vértice.

RUPPERT [23] resolveu este problema de convergência em duas dimensões criando o conceito de círculos protetores em torno dos vértices. Este conceito foi estendido para três dimensões, resultando em esferas protetoras centradas nos vértices aos quais as arestas restritas são incidentes. Quando estas arestas incidentes são divididas na intersecção com a esfera protetora, nenhuma parte de nenhuma aresta permanece ausente ou é removida, uma vez que todos os pontos de intersecção são coesféricos.

Para recuperar uma aresta ausente, RUPPERT [23] descreve o seguinte procedimento de subdivisão de aresta: a primeira subdivisão é realizada no meio da aresta, enquanto a segunda subdivisão é realizada na distância mais próxima de uma potência de dois do vértice original. Todas as outras subdivisões são realizadas

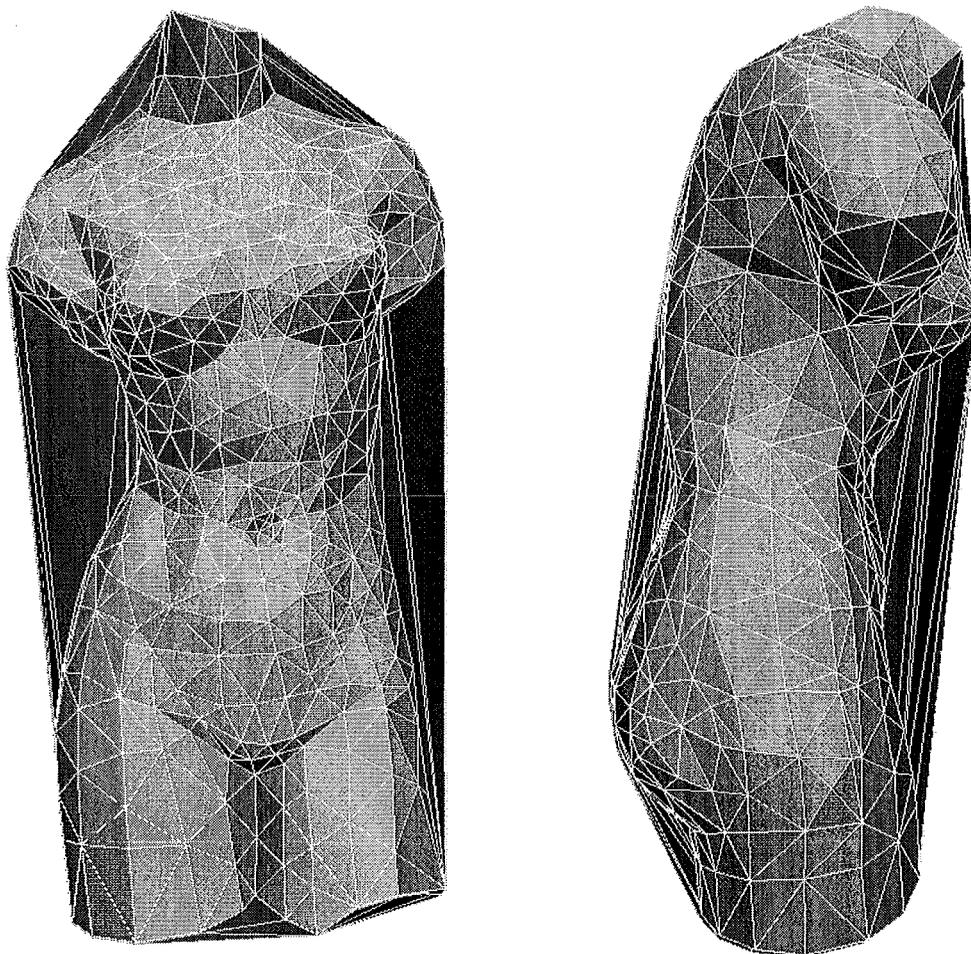


Figura 3.5: A última etapa da geração da triangulação 3D restrita consiste em entalhar a triangulação e classificar os tetraedros da malha. Neste exemplo, o modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1) possui apenas uma região.

no meio da aresta e, conseqüentemente, serão também a uma distância de potência de dois.

Este processo funciona para qualquer aresta ausente arbitrariamente pequena, porque, após poucas subdivisões, todos os vértices inseridos para recuperar um pedaço de uma aresta de restrição estarão a uma mesma distância de potência de dois do vértice original. A Figura 3.7 mostra o resultado deste processo de recuperação de arestas aplicado à triangulação tridimensional do modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1). A base do modelo não é planar e possui um vértice de grau elevado no centro com arestas restritas incidentes formando pequenos ângulos (Figura

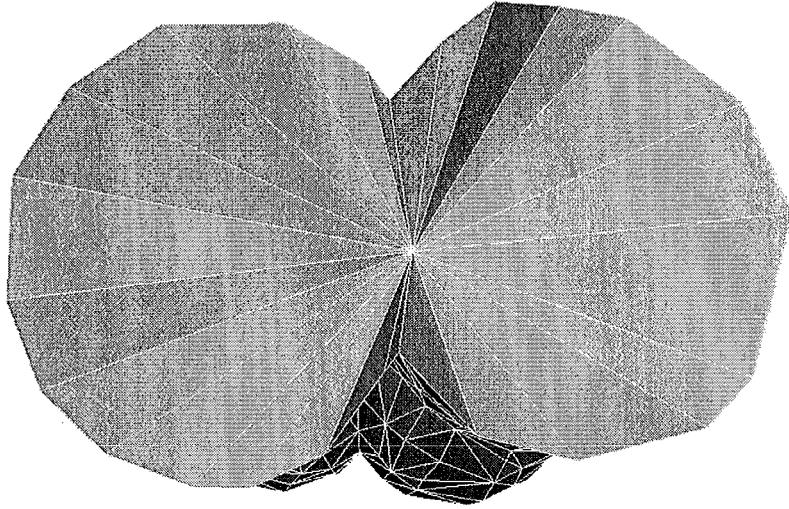


Figura 3.6: Base do modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1). Observa-se o vértice central de alto grau com diversas arestas formando pequenos ângulos entre si.

3.6). A esfera protetora ao redor desse vértice central elimina o processo destrutivo não-convergente durante a recuperação de suas arestas restritas incidentes.

## 3.2 Recuperação de Faces

Recuperar faces de restrição ausentes significa verificar quais faces do modelo de entrada não apareceram na triangulação e forçar o seu aparecimento. Este processo é bem mais complicado que o processo de recuperação de arestas. A primeira dificuldade ocorre na verificação da presença da face poligonal restrita na triangulação. Mesmo que todas as arestas da borda deste polígono estejam presentes na triangulação, isto não implica que a face poligonal correspondente também esteja presente na triangulação. Além disso, uma face poligonal restrita pode estar presente na triangulação como uma coleção de triângulos adjacentes.

Em uma triangulação de Delaunay, se um polígono planar está presente como uma coleção de faces triangulares, estas faces devem formar uma triangulação de Delaunay 2D sobre este polígono [24]. Esta propriedade é utilizada para verificar a presença de faces restritas em uma triangulação  $T(V)$ .

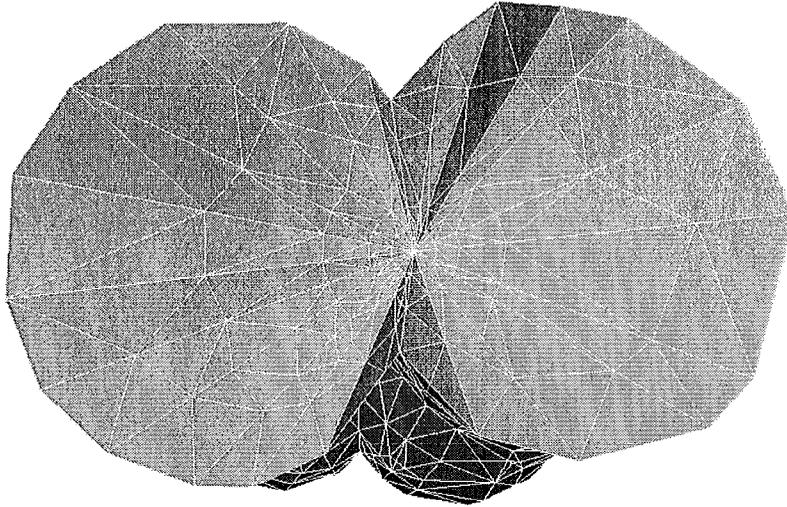


Figura 3.7: Base da triangulação gerada a partir do modelo da Vênus de Milo (Figura 3.1). Observa-se o resultado da aplicação de uma esfera protetora ao redor do vértice central.

O processo de verificação constrói uma triangulação bidimensional rascunho de todos os vértices que formam o polígono  $P$ . Esta triangulação rascunho divide  $P$  em um conjunto de simplexos  $\Delta(P)$ , tal que:

$$\Delta(P) = \{\delta_i(p_a, p_b, p_c)\}, \quad (3.1)$$

onde  $\delta_i(p_a, p_b, p_c)$  é a  $i$ -ésima face triangular de  $\Delta(P)$ . Para simplificar e acelerar a geração de  $\Delta(P)$ , triangulam-se todas as faces poligonais restritas não-convexas. Usando  $\Delta(P)$ , verifica-se se:

$$\forall \delta_i(p_a, p_b, p_c) \in \Delta(P), \exists \gamma_i(p_a, p_b, p_c) \in T(V), \quad (3.2)$$

onde  $\gamma_i(p_a, p_b, p_c)$  é a  $i$ -ésima face triangular de algum tetraedro da malha. Se algum  $\delta_i$  está ausente,  $P$  é recuperado inserindo pontos de Steiner  $SP$ , com uma heurística descrita posteriormente, tal que:

$$P = \cup \delta_i, \quad (3.3)$$

$$\delta_i \equiv \gamma_i \in T(V^*) \quad (3.4)$$

e

$$V^* = V \cup SP, \quad (3.5)$$

onde  $V^*$  é a triangulação após a inserção dos pontos de Steiner.

Se existirem quatro ou mais pontos cocirculares em  $P$ , o processo de verificação pode falhar porque  $\Delta(P)$  não é único. Vale a pena notar que este processo de verificação só funciona se  $T(V)$  é estritamente uma triangulação de Delaunay. Para resolver este problema, faz-se uma cópia do polígono que é dividido pelas arestas de  $T(V)$ , conectando pares de seus vértices. Então, verificam-se quais pedaços desta cópia são triangulares e correspondem a faces em  $T(V)$ . Usando esta abordagem, é possível detectar a presença de partes triangulares mesmo quando os pontos que definem o polígono não estão em posição geral.

A heurística para inserção de pontos de Steiner nas faces é simples: para cada pedaço triangular ausente  $\delta_i$ , averigua-se se alguma de suas arestas está ausente. No caso de existirem arestas ausentes, uma delas é escolhida e um vértice é inserido no meio desta aresta. Quando todas as três arestas estiverem presentes e  $\delta_i$  estiver ausente, insere-se um vértice no meio de cada uma das três arestas.

Para cada subface ausente  $\delta_i$ , um ou três pontos de Steiner podem ser inseridos e  $\Delta(P)$  é reconstruído. Este processo é repetido até

$$\Delta(P) \subset T(V^*). \quad (3.6)$$

A inserção de novos pontos pode causar a remoção de faces previamente recuperadas e, por isso, deve-se manter uma lista de faces a serem inseridas novamente.

Esta heurística facilita significativamente o processo de criação de pontos de Steiner nas arestas de subfaces ausentes  $\delta_i$ , usando essencialmente o mesmo processo descrito na recuperação de arestas. Porém, infelizmente, o processo de recuperação de faces nem sempre converge. A razão para a não convergência é o critério de Delaunay, que é completamente insensível para tudo que não é vértice. Portanto, um ciclo de recuperação de faces aliado à destruição simultânea de faces restritas previamente inseridas pode nunca convergir. A não convergência é uma função dos ângulos diédricos entre as faces poligonais de entrada. Se todos os ângulos diédricos são maiores ou iguais a  $90^\circ$ , a convergência é garantida, conforme mostrado por SHEWCHUK [6]. Na prática, esta é uma limitação excessivamente restritiva e inaceitável para diversas aplicações.

Para evitar o problema de convergência, marca-se uma face como “não recuperada” quando um número predefinido de pontos de Steiner lhe foi inserido. Neste caso, um outro método deve ser aplicado para recuperar esta face restrita.

### 3.2.1 Recuperação de Faces Não Recuperadas

Quando o processo de recuperação de faces descrito anteriormente falha, o processo de geração de triangulações restritas é forçado a abandonar o critério de Delaunay globalmente e a aceitar triangulações não estritamente de Delaunay. HAZLEWOOD [15] mostrou que é possível produzir triangulações restritas apenas retriangulando os tetraedros cujos interiores são interceptados por uma face poligonal restrita ausente.

Primeiro, encontram-se todos os pontos de intersecção entre a face poligonal ausente e as arestas dos tetraedros da triangulação. Depois, todos os tetraedros interceptados são retriangulados localmente com o critério de Delaunay. Os conjuntos de vértices de cada lado do plano que suporta a face poligonal são triangulados separadamente, de modo a não haver visibilidade através desse plano durante a retriangulação. Note que a retriangulação local pode ser obtida por um critério diferente do critério de Delaunay.

Caso as arestas restritas já façam parte da triangulação, a retriangulação local pode ser obtida usando os operadores locais descritos por WEATHERILL e HASSAN [16]. Estes operadores basicamente tratam os casos em que a face poligonal intercepta completamente um tetraedro e o divide em um conjunto de novos poliedros. Estes novos poliedros podem ser tetraedros, pirâmides de base quadrilátera ou prismas com duas faces triangulares e três faces quadriláteras.

Uma vez que cada tetraedro é processado separadamente, não há garantias de que todos os tetraedros interceptados sejam retriangulados consistentemente por esses operadores. Isto ocorre porque um prisma resultante de uma intersecção pode ter todas as suas faces quadriláteras já trianguladas pelos tetraedros adjacentes anteriormente processados. Este problema é resolvido inserindo um ponto no interior do prisma e, desta forma, preservam-se as triangulações adjacentes.

### 3.2.2 Operadores locais de retriangulação

#### Triangulação Tetraedro-Tetraedro

Neste caso, apenas uma aresta do tetraedro intercepta a face que deve ser recuperada. Quando isto acontece, insere-se um ponto exatamente na interseção entre a aresta e a face e, com isso, este tetraedro é dividido em duas partes: um tetraedro superior e um outro tetraedro inferior, compartilhando a face de restrição (Figura 3.8).

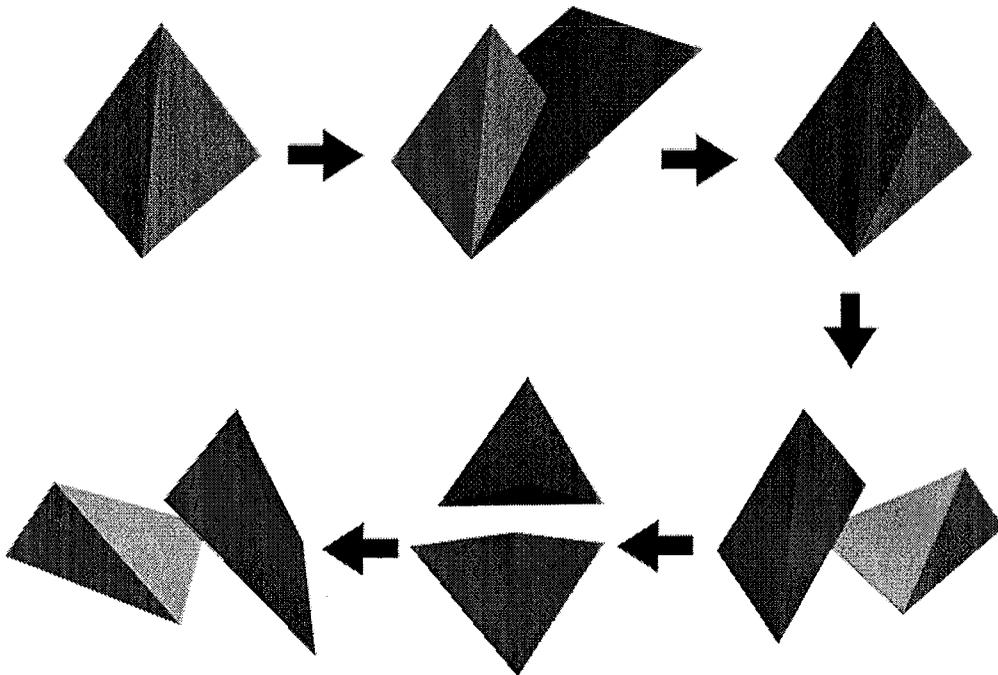


Figura 3.8: Triangulação Tetraedro-Tetraedro.

#### Triangulação Tetraedro-Pirâmide

Neste caso, duas arestas do tetraedro interceptam a face que deve ser recuperada. Quando isto acontece, inserem-se dois pontos exatamente nas interseções entre as arestas e a face e, com isso, este tetraedro é dividido em duas partes: um tetraedro superior e uma pirâmide inferior que compartilham a face de restrição. Esta pirâmide gerada também é retriangulada de acordo com a sua vizinhança (Figura 3.9).

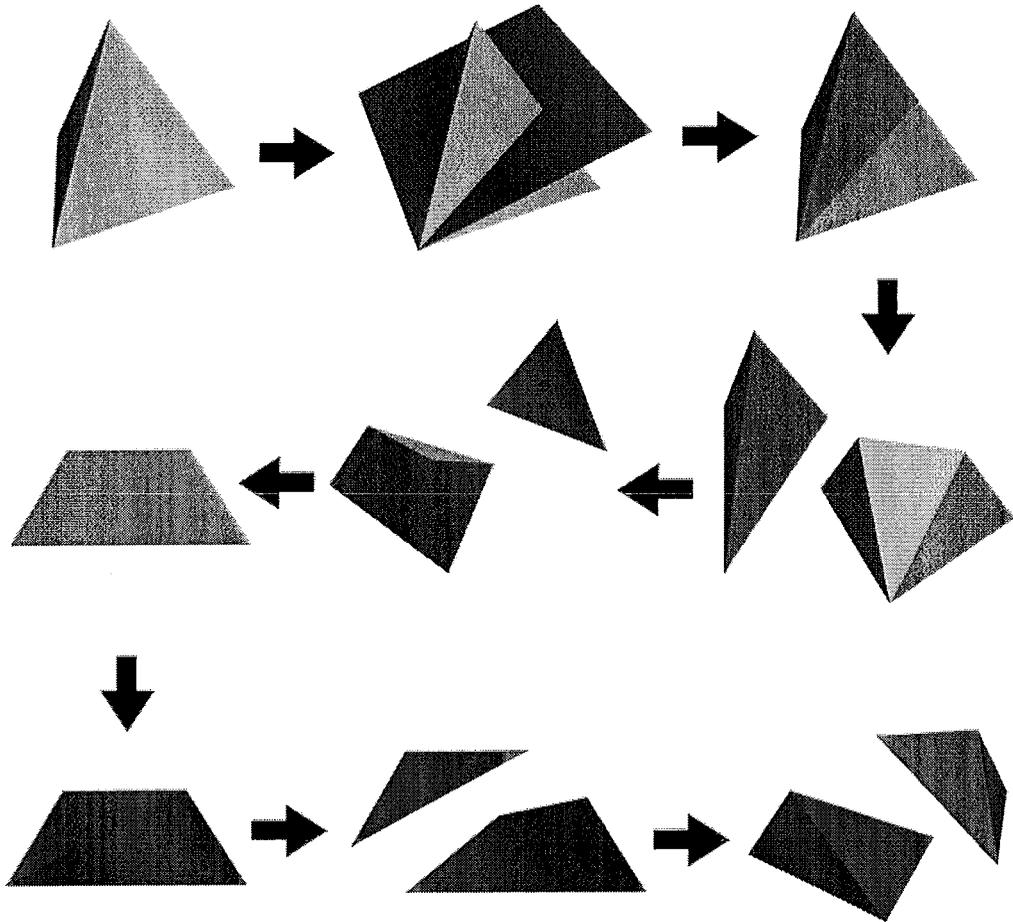


Figura 3.9: Triangulação Tetraedro-Pirâmide.

#### Triangulação Tetraedro-Prisma sem inserção de pontos no prisma

Neste caso, três arestas do tetraedro interceptam a face que deve ser recuperada. Quando isto acontece, inserem-se três pontos exatamente nas interseções entre as arestas e a face e, com isso, este tetraedro é dividido em duas partes: um tetraedro superior e um prisma inferior, compartilhando a face de restrição. Neste caso, o prisma gerado pode ser diretamente retriangulado de acordo com a sua vizinhança (Figura 3.10).

#### Triangulação Tetraedro-Prisma com inserção de pontos no prisma

Neste caso, três arestas do tetraedro interceptam a face que deve ser recuperada. Quando isto acontece, inserem-se três pontos exatamente nas interseções entre as

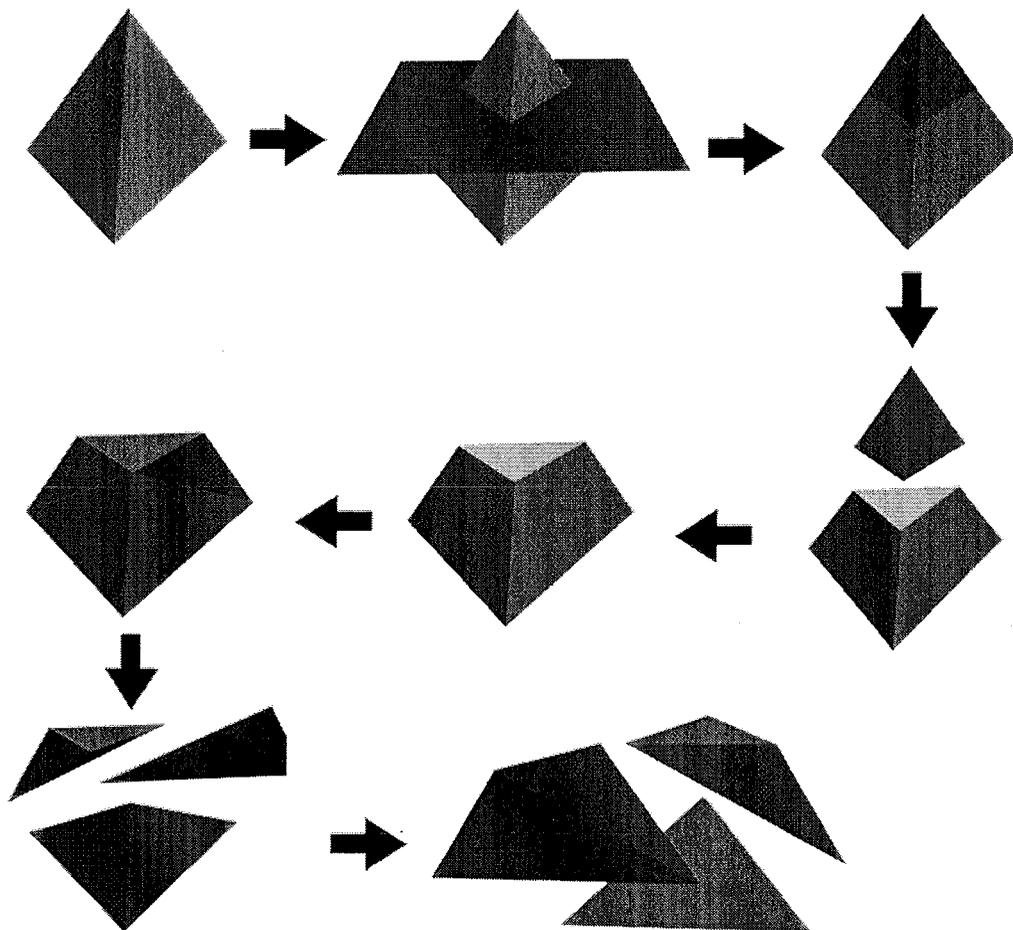


Figura 3.10: Triangulação Tetraedro-Prisma sem inserção de pontos no prisma.

arestas e a face  $e$ , com isso, este tetraedro é dividido em duas partes: um tetraedro superior e um prisma inferior, que compartilham a face restrita. Neste caso, o prisma gerado não pode ser diretamente retriangulado de acordo com a sua vizinhança. Para solucionar este problema, insere-se um ponto no centro deste prisma e, dessa maneira, ele pode ser retriangulado em conformidade com sua vizinhança (Figura 3.11).

### Triangulação Prisma-Prisma sem inserção de pontos no prisma

Neste caso, quatro arestas do tetraedro interceptam a face que deve ser recuperada. Quando isto acontece, inserem-se quatro pontos exatamente nas interseções entre as arestas e a face  $e$ , com isso, este tetraedro é dividido em duas partes: um prisma

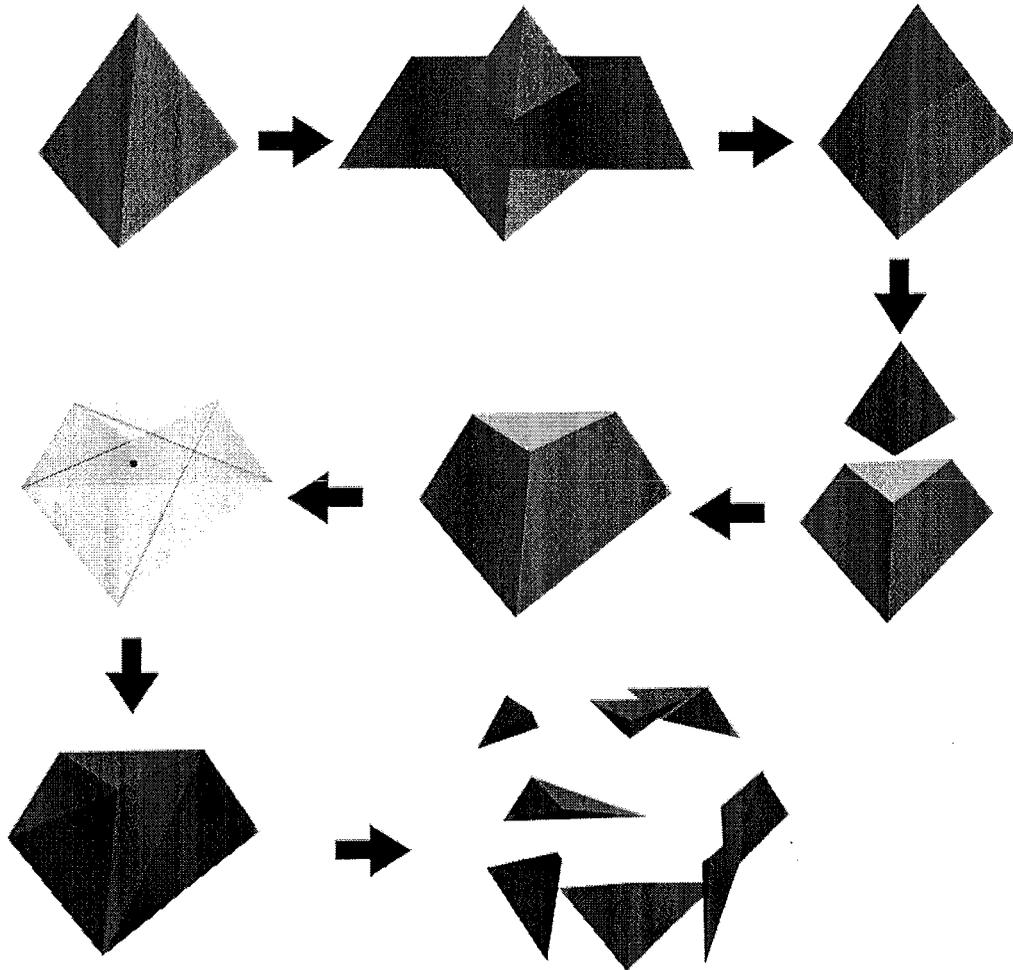


Figura 3.11: Triangulação Tetraedro-Prisma com inserção de pontos no prisma.

superior e um prisma inferior, que compartilham a face de restrição. O prisma superior possui pelo menos um grau de liberdade para sua retriangulação, que é justamente a face que ele compartilha com o prisma inferior. Isto faz com que sempre seja possível sua retriangulação. Neste caso, o prisma inferior também pode ser diretamente retriangulado de acordo com a sua vizinhança (Figura 3.12).

### Triangulação Prisma-Prisma com inserção de pontos no prisma

Neste caso, quatro arestas do tetraedro interceptam a face que deve ser recuperada. Quando isto acontece, inserem-se quatro pontos exatamente nas interseções entre as arestas e a face e, com isso, este tetraedro é dividido em duas partes: um prisma superior e um prisma inferior, que compartilham a face restrita. O prisma superior

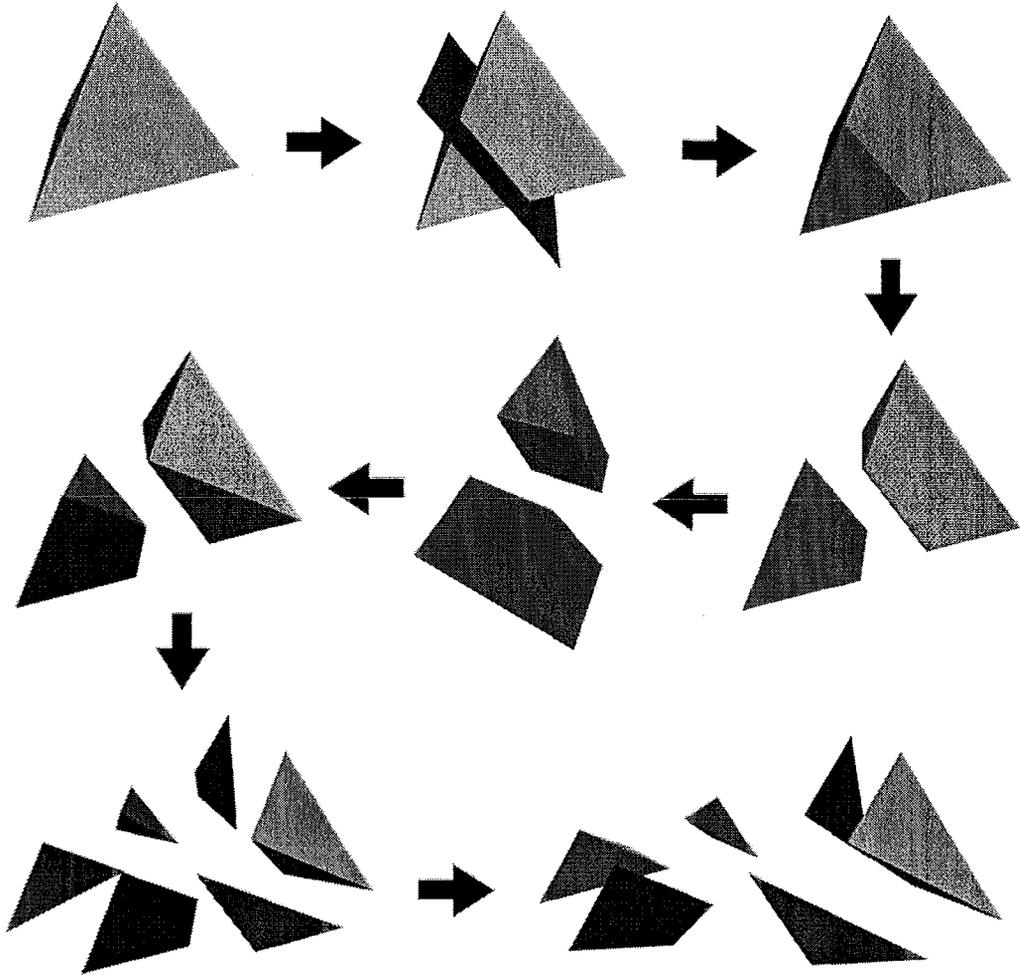


Figura 3.12: Triangulação Prisma-Prisma sem inserção de pontos no prisma.

possui pelo menos um grau de liberdade para sua retriangulação, que é justamente a face que ele compartilha com o prisma inferior. Isto faz com que sempre seja possível sua retriangulação. Neste caso, o prisma inferior não pode ser diretamente retriangulado de acordo com a sua vizinhança. Para solucionar este problema, insere-se um ponto no centro deste prisma e, dessa maneira, ele pode ser retriangulado em conformidade com sua vizinhança (Figura 3.13).

### 3.3 Classificação dos Simplexos

Após recuperar todas as faces de restrição, obtém-se a triangulação de Delaunay restrita do fecho convexo do modelo. Neste momento, a triangulação precisa ser

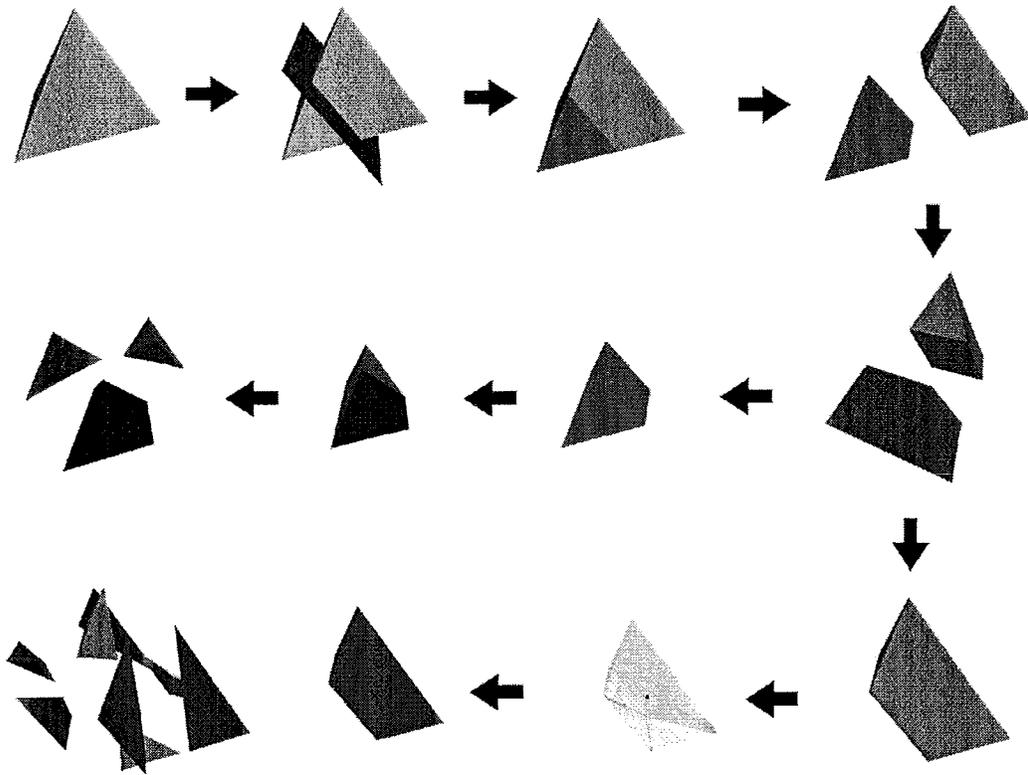


Figura 3.13: Triangulação Prisma-Prisma com inserção de pontos no prisma.

entalhada, removendo os tetraedros do lado de fora do modelo e armazenando atributos nos simplexos de acordo com as propriedades do modelo. Para tal, utiliza-se um esquema de classificação que aproveita as informações de adjacência para minimizar os testes de localização.

Em Geociências, é comum criar modelos sísmicos através da intersecção de conjuntos de superfícies poligonais, gerando assim modelos com múltiplas regiões. A idéia deste trabalho é, também, gerar triangulações deste tipo de modelo, onde cada região conta com propriedades distintas [25, 26]. Após a triangulação ser entalhada, cada simplexo da malha é classificado com o objetivo de atribuir propriedades aos elementos de cada região do modelo. Esta classificação também permite especificar os simplexos correspondentes às superfícies que definem as condições de fronteira, informação necessária nos Métodos de Elementos Finitos.

Durante as etapas de recuperação de arestas e recuperação de faces, uma estrutura auxiliar representando o modelo de entrada é mantida de forma consistente

à triangulação sendo gerada. Esta estrutura tem uma utilidade importante nesta etapa: marcar as faces dos tetraedros que definem as fronteiras do modelo. Esses tetraedros marcados definem, na triangulação, as condições de fronteira entre as regiões do modelo.

O entalhamento da triangulação consiste em percorrer os tetraedros externos à triangulação e verificar se suas faces estão marcadas. Entende-se por tetraedro externo aquele que não possui algum tetraedro adjacente por face na triangulação. Se existe alguma face marcada  $F$  no tetraedro externo  $A$  que não possua um tetraedro  $B$  adjacente, então o tetraedro  $A$  deve ser mantido na triangulação. Caso contrário, o tetraedro  $A$  deve ser removido e todos os tetraedros adjacentes a ele, ainda não verificados, devem ser considerados tetraedros externos. Este procedimento termina quando todos os tetraedros externos forem avaliados.

Para classificar os simplexes, faz-se um teste de ponto em região para um tetraedro, determinando a região em que ele se encontra. Então, este tetraedro é utilizado como semente para um método de preenchimento por inundação (*floodfill*, em inglês). A partir da semente e usando as informações de adjacências, visitam-se todos os tetraedros de uma região sem cruzar as fronteiras da mesma. Durante esta visita, atribuem-se aos elementos da triangulação as propriedades referentes à região sendo percorrida.

No fim do preenchimento por inundação relativo a uma determinada região, pode haver tetraedros adjacentes à sua fronteira ainda não visitados. Estes tetraedros pertencem a uma região vizinha, portanto podem ser utilizados como sementes para um novo preenchimento por inundação relativo a esta região vizinha. A etapa de classificação de simplexes termina quando todos os tetraedros da triangulação forem visitados.

## Capítulo 4

# Qualidade da Malha

Aplicações industriais de Métodos de Elementos Finitos usando malhas tetraédricas, tipicamente, começam com um modelo geométrico a partir do qual a malha é gerada. Geralmente, o próximo passo após a geração da malha consiste em utilizar métodos heurísticos de aprimoramento da malha que tentam melhorar a qualidade de seus tetraedros. A qualidade de um tetraedro é normalmente expressa por um número que estima seus efeitos (bons ou ruins) no erro de interpolação, no erro de discretização e no condicionamento matricial (*stiffness matrix conditioning*, em inglês). A qualidade de uma malha é amplamente ditada pelos seus piores elementos, ou seja, os piores tetraedros têm muito mais influência do que os tetraedros médios.

Um *sliver* é um tetraedro cujos quatro vértices encontram-se muito próximos a um plano e cuja projeção perpendicular neste plano é um quadrilátero convexo sem aresta curta (*short edge*, em inglês). Os *slivers* são completamente indesejáveis em malhas tetraédricas geradas para aplicações de Métodos de Elementos Finitos. Mesmo quando o conjunto de pontos de uma triangulação é bem espaçado, *slivers* podem aparecer. Portanto, métodos de remoção de *slivers* são desenvolvidos e inseridos no processo de geração de malhas.

Existem dois métodos populares de aprimoramento de malhas: a suavização (*smoothing*, em inglês) e as transformações topológicas. A suavização é o ato de mover um ou mais vértices para melhorar a qualidade de seus tetraedros incidentes. A suavização não muda a topologia (conectividade) da malha. As transformações topológicas são operações que removem tetraedros da malha e os substituem por um conjunto diferente de tetraedros que ocupam o mesmo espaço, alterando a es-

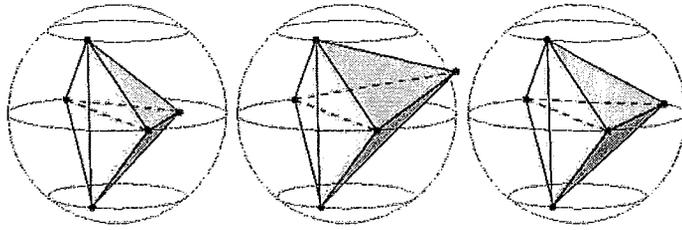


Figura 4.1: Exemplos de *sliver* em diferentes triangulações. No exemplo da esquerda, o critério da esfera vazia (critério de Delaunay) não é satisfeito. Os outros dois exemplos satisfazem este critério, ou seja, são exemplos de triangulações de Delaunay que possuem *sliver*.

estrutura topológica da malha. A suavização encontra-se amplamente no domínio de otimização numérica, enquanto as transformações topológicas encontram-se no domínio de otimização combinatória. As duas técnicas são mais efetivas quando utilizadas em conjunto.

A suavização e as transformações topológicas são normalmente usadas como operações em métodos de escalada (*hill-climbing*, em inglês) para otimizar a qualidade da malha. Uma função-objetivo mapeia cada malha possível a um valor numérico (ou seqüência de valores) que descrevem a qualidade da malha. O método de escalada consiste em avaliar a aplicação de uma determinada operação em um local específico da triangulação. Se a qualidade da malha modificada for maior que a da malha original, então a operação é efetivamente aplicada à triangulação e o método de escalada procura por outra operação que possa melhorar a qualidade da nova malha. Operações que não melhorem o valor da função-objetivo não são aplicadas à triangulação. Logo, a malha final não pode ser pior que a malha de entrada. O método de escalada termina quando nenhuma operação consegue produzir maiores aprimoramentos.

FREITAG e OLLIVIER-GOOCH [27] apresentam um método de escalada que combina suavização baseada em otimização aplicada a diversas transformações topológicas, tais como *flips 2-3*, *flips 3-2* e uma operação chamada remoção de aresta (*edge removal*, em inglês). No mesmo trabalho, FREITAG e OLLIVIER-GOOCH [27] relatam a performance de diversos agendamentos (*schedule*, em inglês) em uma

variedade de malhas. Entende-se por agendamento tanto a ordem e a quantidade de operações quanto os critérios de seleção dos tetraedros que devem ser aprimorados. FREITAG e OLLIVIER-GOOCH [27] mostram também que o melhor agendamento desenvolvido por eles elimina a maior parte dos tetraedros ruins e oferecem recomendações empíricas sobre o que faz um agendamento ser melhor que outro.

KLINGNER e SHEWCHUK [28] propõem novas operações topológicas, além da suavização aplicada aos vértices da fronteira, para tornar ainda mais poderoso o repertório de operações do método de escalada. Eles ainda apresentam um novo agendamento, que compreende essas novas operações, e demonstram que todas operações, quando utilizadas em conjunto, produzem um resultado muito mais efetivo do que utilizadas separadamente. Mesmo tendo a velocidade do seu método como uma segunda consideração, KLINGNER e SHEWCHUK [28] fazem uma análise das operações que causam maior impacto na melhoria da qualidade da malha, tanto individualmente como combinadas com outras operações.

## 4.1 Suavização

A técnica mais famosa de suavização é a suavização Laplaciana, na qual um vértice é movido para o centróide dos vértices ao qual está conectado [29]. Tipicamente, a suavização Laplaciana é aplicada a cada vértice da malha em seqüência e diversos passos de suavização são realizados, onde cada passo move cada vértice uma vez. A suavização Laplaciana é popular e efetiva em malhas bidimensionais, porém, para malhas tridimensionais, ela é muito menos confiável e geralmente produz tetraedros ruins.

FREITAG *et al.* [30] propõem um algoritmo de suavização que otimiza o pior tetraedro em um conjunto. Na prática, este algoritmo maximiza o menor ângulo dentre todos os tetraedros incidentes a um determinado vértice. Esta suavização é aplicada apenas a vértices no interior da malha, ou seja, os vértices na fronteira da malha não são suavizados. Esta suavização é a utilizada no processo de geração de malhas deste trabalho, apesar de KLINGNER e SHEWCHUK [28] estenderem esta suavização para vértices na fronteira da malha. Para tal, é necessário que as faces da fronteira da malha incidentes a um vértice pareçam (com alguma tolerância) estar

todas em um mesmo plano. Dessa maneira, este vértice pode ser suavizado ao longo deste plano.

A suavização utilizada faz uso do que FREITAG e OLLIVIER-GOOCH [27] chamam de suavização inteligente (*smart smoothing*, em inglês). Se uma operação de suavização não for capaz de melhorar a qualidade dos tetraedros envolvidos, então esta operação de suavização não é realizada. Portanto, a qualidade da malha nunca diminui com a suavização.

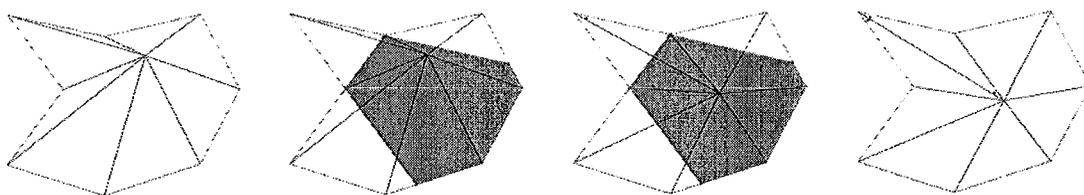


Figura 4.2: Exemplo bidimensional de suavização. Observa-se que o vértice suavizado deve permanecer na região cinza para evitar problemas de topologia (conectividade) na malha.

## 4.2 Transformações Topológicas

As transformações topológicas compreendem as operações que alteram a conectividade dos tetraedros da malha, de modo que o volume da malha permaneça inalterado. Novos tetraedros devem substituir alguns tetraedros da malha, ocupando o mesmo espaço. Nesta fase do processo de geração de malhas, isto é feito de maneira que a qualidade da malha melhore através dessa substituição de tetraedros. Caso os novos tetraedros não apresentem qualidade superior aos que devem ser substituídos, a operação não é realizada. Entre as transformações topológicas implementadas estão: *flip* 2-3, *flip* 3-2 e *flip* 4-4. Todas estas transformações topológicas foram apresentadas no Capítulo 2, mais precisamente na discussão sobre o algoritmo de *flip* 3D criado por JOE [4, 5].

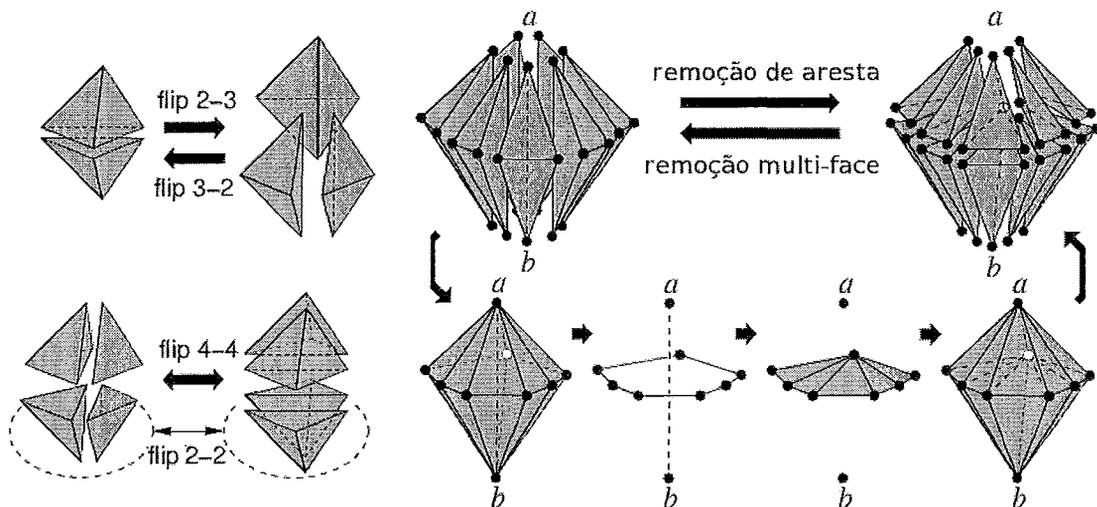


Figura 4.3: Exemplos de transformações topológicas usadas em aprimoramento de malhas.

### 4.3 Remoção de *Slivers*

CAVENDISH *et al.* [31] mostram como a presença de *slivers* é prejudicial em triangulações tridimensionais. Eliminar *slivers* não é uma tarefa simples e até mesmo triangulações de Delaunay geradas a partir de pontos bem espaçados podem conter *slivers*, conforme documentado por TALMOR [32].

O primeiro resultado positivo na remoção de *slivers* foi obtido por CHEW [33] que os elimina adicionando novos pontos, de modo a gerar uma malha uniformemente densa. CHENG *et al.* [34] mostraram como atribuir pesos aos pontos, durante a construção da triangulação de Delaunay ponderada (*weighted*, em inglês), de tal maneira que *slivers* não aparecem. Este método não adiciona novos pontos, porém não é completamente eficaz para um modelo de entrada qualquer. EDELSBRUNNER *et al.* [35] propõem técnicas de melhoria de malhas em uma etapa de pós-processamento para remoção de *slivers*, principalmente através de operações de suavização.

No processo de geração de malhas deste trabalho, foram implementadas algumas operações que visam remover *slivers* em várias etapas deste processo. Porém, algumas destas operações só podem ser realizadas após a recuperação das faces restritas, uma vez que estas operações violam o critério de Delaunay globalmente. As

operações implementadas para a remoção de *slivers* compreendem: a suavização de vértices internos da malha, *flip* 2-3, *flip* 3-2 e *flip* 4-4. Após a etapa de classificação de simplexes, onde os tetraedros que não fazem parte do modelo são removidos, uma nova operação de remoção de *slivers* torna-se possível: a pinça (*peel off*, em inglês) de *slivers*.

### 4.3.1 Pinça de *Slivers*

Esta operação consiste em detectar os *slivers* que possuem alguma face na borda da triangulação e, simplesmente, removê-los. Os quatro vértices de um *sliver* são praticamente coplanares e isto implica que o mesmo possui volume desprezível. Portanto, a pinça de *slivers* não provocará qualquer mudança na triangulação, uma vez que estes se encontram na borda.

## 4.4 Aprimoramento da Malha

O sucesso do Método de Elementos Finitos depende do formato dos tetraedros da malha utilizada. Ângulos diédricos muito grandes (próximos a  $180^\circ$ ) causam grandes erros de interpolação e reduzem a precisão das simulações numéricas [36, 37]. Ângulos diédricos pequenos fazem com que as matrizes (*stiffness matrices*, em inglês) associadas ao Método de Elementos Finitos sejam mal condicionadas [37]. Em alguns casos, um único tetraedro ruim pode arruinar uma simulação.

Dado um modelo de entrada, a triangulação de Delaunay restrita gerada usualmente possui uma enorme quantidade de tetraedros com formas não regulares e indesejadas. Para superar este problema, uma técnica bastante comum foi adotada: a incorporação de uma grade regular no espaço ocupado pelo modelo. No entanto, dependendo da configuração da grade, pode-se gerar um grande número de tetraedros. Este fato motiva o uso de grades adaptativas, porém esta modalidade de grades não foi implementada por este trabalho. Na literatura, há três tipos de grade freqüentemente usados: grade cúbica, grade hexagonal e grade cristalizada (*lattice*, em inglês). Deve-se escolher qual o tipo de grade que será incorporada à triangulação no início do processo de geração de malhas restritas, antes mesmo da etapa de recuperação de arestas da restrição. Os pontos da grade serão inseridos

segundo o critério de Delaunay, assim como os pontos do modelo de entrada. O uso de uma grade permite gerar uma grande quantidade de tetraedros regulares.

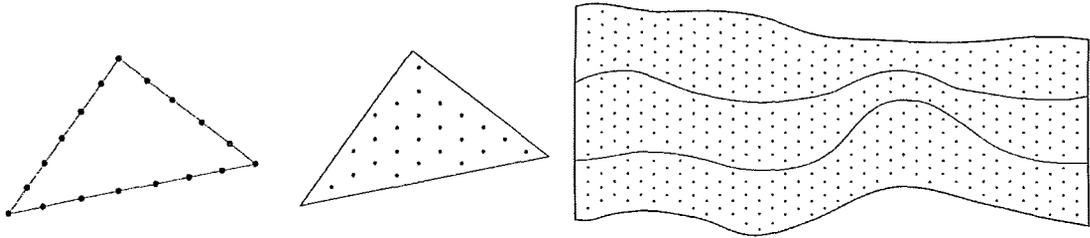


Figura 4.4: Exemplo de inserção de uma grade de pontos. À esquerda, observa-se a inserção de pontos nas arestas de uma face. No centro, pontos foram inseridos no interior de uma face. À direita, ilustra-se uma secção plana em um modelo com múltiplas regiões e os pontos inseridos no seu interior.

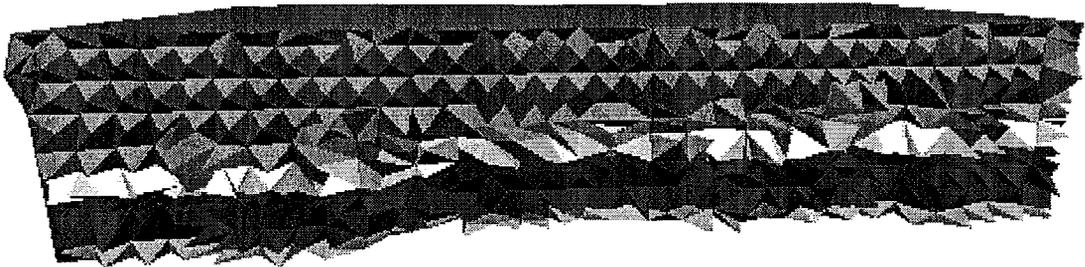


Figura 4.5: Visão frontal ao plano de corte da triangulação de um modelo com múltiplas regiões ao inserir uma grade de pontos. Observa-se certa regularidade dos tetraedros no interior da malha.

A qualidade de um tetraedro pode ser encapsulada em um único valor numérico chamado medida de qualidade. Existem diversas maneiras diferentes de determinar essa medida de qualidade [28, 37]. A medida de qualidade escolhida foi o menor valor do seno dos seis ângulos diédricos de um tetraedro, também conhecida por medida de menor seno. Esta medida penaliza tanto ângulos grandes quanto ângulos pequenos e FREITAG e OLLIVIER-GOOCH [27] a consideram a mais efetiva entre todas as medidas testadas. A medida de menor seno também tem a vantagem de que os ângulos diédricos de um tetraedro são intuitivos.

KLINGNER e SHEWCHUK [28] realizam um método de escalada sobre todos os tetraedros da malha, para que a malha resultante possua os piores tetraedros tão

bons quanto for possível. Apesar de apresentarem excelentes resultados quanto à qualidade dos tetraedros, o tempo gasto durante o aprimoramento de uma malha é muito grande. Como os tetraedros com piores formatos têm muito mais influência que os tetraedros com formatos médios, o método de escalada utilizado por este trabalho executará operações apenas sobre os tetraedros considerados ruins. Um tetraedro é considerado ruim se os seus ângulos diédricos, mínimo e máximo, ultrapassam os limites, inferior e superior, passados como parâmetro na implementação do método (usualmente,  $10^\circ$  e  $130^\circ$ ).

Operações, como suavização, *flip* 2-3, *flip* 3-2 e *flip* 4-4, são utilizadas no método de escalada. Além dessas operações, foi implementada a operação de inserção de pontos apresentada por KLINGNER e SHEWCHUK [28].

#### 4.4.1 Inserção de Ponto

Esta operação calcula uma posição em um tetraedro ruim, normalmente o baricentro deste tetraedro. Depois, tenta inserir um ponto nesta posição computando o melhor conjunto de tetraedros possível para remover da triangulação. Esse conjunto de tetraedros é chamado cavidade. A triangulação é vista como um grafo de visibilidade, em relação à posição do ponto inserido, e o cálculo da cavidade é realizado como uma busca nesse grafo.

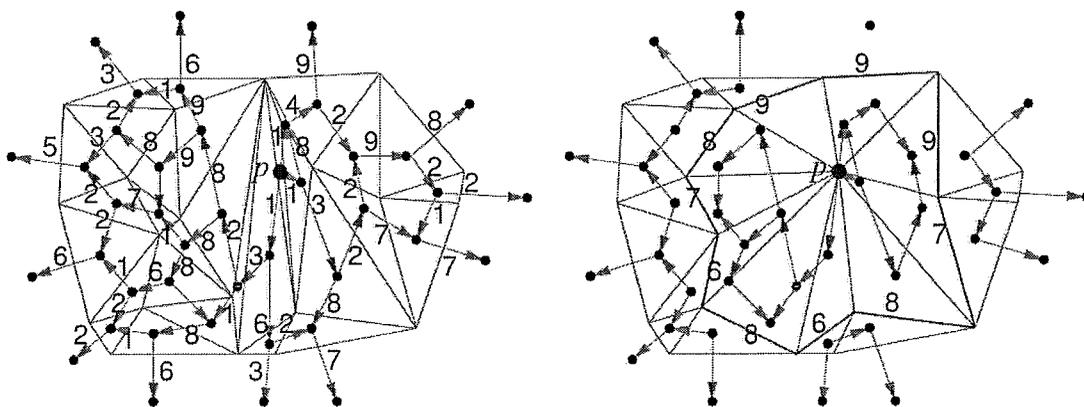


Figura 4.6: Inserção de ponto. Neste caso bidimensional, à esquerda observa-se o grafo de visibilidade a partir do novo ponto inserido ponto  $p$ , enquanto à direita observa-se a cavidade (em rosa) calculada a partir desse grafo.

Uma vez computada a cavidade, constroem-se novos tetraedros ligando o ponto inserido às faces de fronteira da cavidade. Uma etapa de suavização deste novo ponto inserido é executada. Se a qualidade dos novos tetraedros for superior à qualidade dos tetraedros da cavidade, então a operação é realizada com sucesso. Caso contrário, a malha permanece inalterada.

Um fato interessante desta operação é a possível remoção de vértices da malha. Se todos os tetraedros incidentes a um determinado vértice fizerem parte da cavidade computada, então este vértice deve ser removido da triangulação. Portanto, assim como observado por KLINGNER e SHEWCHUK [28], esta operação algumas vezes reduz o número de vértices da malha.

#### 4.4.2 Agendamento de Operações

O agendamento de operações compreende a ordem e a quantidade de operações que devem ser realizadas pelo método de escalada. Cabe também ao agendamento definir sobre quais tetraedros as operações devem ser executadas. Geralmente, o agendamento é realizado através de passos de operações sobre os tetraedros selecionados. Os agendamentos presentes na literatura são heurísticos e desenvolvidos através de tentativas e erros, porém oferecem valiosas dicas baseadas em testes práticos.

O algoritmo de JOE [38] visita cada face da triangulação verificando se qualquer uma das transformações de seu repertório pode melhorar os tetraedros localmente. Ele executa passos sobre toda a triangulação (verificando cada face) e termina quando um passo não provoca nenhuma alteração na malha.

O agendamento de operações de FREITAG e OLLIVIER-GOOCH [27] começa com dois passos de *flips* 2-3, depois executa um passo de operações de remoção de arestas e dois passos de suavização em todos os tetraedros da malha. Em seguida, realiza um passo de *flips* 2-3 e operações de remoção de arestas apenas nos piores tetraedros da malha. Esse agendamento termina com mais dois passos de suavização de todos os vértices da triangulação.

KLINGNER e SHEWCHUK [28] desenvolveram um agendamento que não possui um número fixo de passos. Eles começam com um passo de suavização por todos os vértices da triangulação e um passo de transformações topológicas (sem inserção de vértices). Todas as suas transformações topológicas tentam, primeiro,

operações de remoção de arestas para depois tentar operações de remoção de faces. O agendamento prossegue em um laço que realiza a suavização de todos os vértices da triangulação. Se a suavização não melhorar a qualidade da malha, executa as transformações topológicas. Se estas transformações não surtirem efeito positivo, executa a inserção de vértices. Toda vez que uma dessas operações melhora a qualidade da malha, o laço de operações é reiniciado. O agendamento termina quando três passos consecutivos do laço não apresentam melhora na qualidade da malha.

O agendamento desenvolvido por KLINGNER e SHEWCHUK [28] apresenta ótimos resultados referentes à qualidade da malha, porém o tempo gasto não é a maior preocupação dos autores. Ao contrário dessa abordagem, o tempo gasto no processo de aprimoramento da malha é, para este trabalho, uma consideração muito importante. Portanto, o agendamento escolhido tenta equilibrar o tempo despendido no processo de aprimoramento da malha e a qualidade dos tetraedros da triangulação.

A intenção do processo de aprimoramento implementado não é produzir uma malha cujos piores tetraedros sejam tão bons quanto for possível. A intenção é produzir uma malha que não possua tetraedros ruins. Os agendamentos que percorrem toda a malha tentam sempre melhorar os tetraedros da triangulação, inclusive aqueles com formatos aceitáveis (bons) sob o ponto de vista de Métodos de Elementos Finitos. Como os tetraedros ruins são realmente indesejáveis, as operações de melhoria da malha, dentro do laço, serão executadas apenas sobre eles.

O agendamento inicia com um passo de suavização de todos os vértices no interior da malha. Depois, realiza um laço que tenta sempre melhorar um tetraedro ruim por vez. A ordem de tentativa de execução das operações, dentro desse laço, é a seguinte: suavização dos vértices do tetraedro, *flip* 3-2, *flip* 4-4, *flip* 2-3 e inserção de um novo ponto no centro do tetraedro. Dessa maneira, o desempenho do agendamento não é um fator crítico, ao mesmo tempo em que a qualidade dos tetraedros não é prejudicial para Métodos de Elementos Finitos.

# Capítulo 5

## Implementação e Resultados

Um dos objetivos deste trabalho é implementar um gerador de malhas restritas. Este gerador baseia-se nos métodos apresentados no Capítulo 3 para gerar triangulações de Delaunay 3D restritas. O gerador também é capaz de realizar operações na malha de modo a aprimorar a qualidade dos seus tetraedros, conforme apresentado no Capítulo 4. Neste capítulo, são apresentados alguns detalhes referentes à sua implementação, tal como alguns resultados na geração e no aprimoramento da qualidade das malhas geradas.

O gerador de malhas restritas foi implementado de modo a ser portátil entre os sistemas Windows e Linux sem mudança em seu código-fonte. Outra consideração que deve ser feita em torno deste gerador de malhas é a sua funcionalidade tanto em plataformas de 32 bits quanto em plataformas de 64 bits. Para que o gerador de malhas tenha essas características, o seu código-fonte foi desenvolvido na linguagem C++, sob o paradigma da programação orientada a objetos. O gerador de malhas faz uso de duas bibliotecas: STL (*Standard Template Library*) [39] e CGAL [40]. As duas bibliotecas possuem a característica de serem portáteis entre os mesmos sistemas e mesmas plataformas do gerador de malhas. STL é uma biblioteca desenvolvida na linguagem C++ e possui classes, algoritmos e iteradores. Ela fornece muitos algoritmos e estruturas de dados básicos de ciência da computação sob o conceito de programação genérica.

## 5.1 CGAL (*Computational Geometry Algorithms Library*)

*CGAL Open Source Project* é um projeto cujo objetivo é fornecer fácil acesso a algoritmos geométricos eficientes e confiáveis, na forma de uma biblioteca C++ [40]. Como exemplos, esta biblioteca oferece estruturas de dados e algoritmos como:

- Triangulações (triangulação 2D restrita e triangulações Delaunay 2D e 3D);
- Diagramas de Voronoi;
- Operações booleanas em polígonos e poliedros;
- Arranjos de curvas;
- Algoritmos de malhas (geração de malha Delaunay 2D e geração de malha, subdivisão e parametrização de malha de superfície 3D);
- Algoritmos de fecho convexo;
- Operações em polígonos;
- Estruturas de busca (*kD-trees*, *range trees* e *segment trees*);
- Entre outros.

Todas estas estruturas de dados e algoritmos operam em objetos geométricos, como pontos, vetores e segmentos, e realizam testes geométricos (predicados) nos mesmos. Estes objetos e predicados são agrupados nos chamados núcleos (*kernels*) da biblioteca.

Em particular, aplicações que requerem precisão numérica devem utilizar um núcleo que suporte aritmética exata, por exemplo, um núcleo que faça uso da biblioteca GMP (*GNU Multi-Precision Library*) [41]. GMP é uma biblioteca livre para aplicações que necessitam de precisão aritmética arbitrária, operando em diversos tipos de representações numéricas. Na estrutura do gerador de malhas restritas, o núcleo utilizado é o de predicados exatos e geometria exata dos objetos, garantindo assim a robustez em todas as etapas da geração de malhas. O uso de predicados

exatos é imprescindível na geração consistente da triangulação de Delaunay tridimensional. O uso de geometria exata dos objetos é justificado nas etapas de geração de malhas em que testes de intersecção são necessários, preservando a robustez do gerador de malhas.

### 5.1.1 Classe *HalfedgeDS\_default* da biblioteca CGAL

Esta estrutura de dados é utilizada pelo gerador de malhas para representar o modelo de entrada. Ela armazena eficientemente as arestas e faces poligonais da restrição. Quando um ponto é inserido na triangulação, se este ponto se localizar em uma aresta restrita ou face restrita, esta estrutura também é atualizada. A classe que representa esta estrutura já possui implementados todos os métodos de atualização necessários. Esta estrutura é bastante utilizada nas etapas de recuperação de arestas restritas, recuperação de faces restritas e classificação dos simplexes.

### 5.1.2 Classe *Delaunay\_triangulation\_3* da biblioteca CGAL

Esta classe é derivada da classe de triangulação tridimensional básica da biblioteca CGAL. Sua construção incremental é realizada a partir da inserção seqüencial de pontos, segundo o critério de Delaunay. Esta classe representa a triangulação do fecho convexo do conjunto de pontos que nela são inseridos. Não há qualquer sensibilidade para restrições de faces ou arestas já implementada. O gerador de malhas restritas especializa esta classe adicionando muitos métodos e sobrescrevendo outros.

Uma observação importante em relação às estruturas de triangulação da biblioteca CGAL é a maneira como estas estruturas representam as triangulações. A estrutura de dados que representa um tetraedro armazena apenas os quatro vértices que o compõem e seus quatro vizinhos (tetraedros adjacentes por face). Isto quer dizer que a estrutura que armazena os tetraedros de uma triangulação 3D não armazena qualquer informação de arestas e faces. Toda informação de arestas ou faces que for necessária é calculada, mas não armazenada. Este fato tem o enorme benefício de manter a estrutura da triangulação enxuta, ou seja, o consumo de memória é bastante reduzido. Este fator é importante quando se deseja triangular modelos que possuem milhões de pontos e irão gerar milhões de tetraedros, como normalmente acontece com modelos sísmicos. A desvantagem desta forma de representação é o

fato de que se deseja forçar o aparecimento justamente de arestas e faces na triangulação. Para manter a estrutura de representação da triangulação enxuta, as informações sobre arestas restritas e faces restritas são armazenadas em estruturas de dados auxiliares.

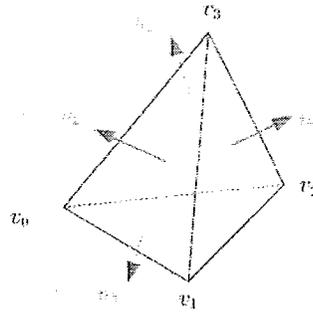


Figura 5.1: Representação de um tetraedro na estrutura de triangulação da biblioteca CGAL. Apenas os quatro vértices do tetraedro e seus quatro vizinhos são armazenados.

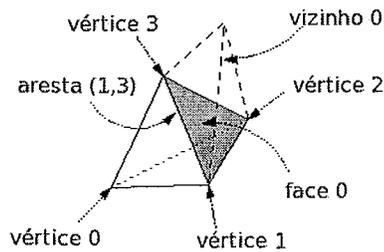


Figura 5.2: Representação da conectividade entre tetraedros na estrutura de triangulação da biblioteca CGAL. As informações de arestas e faces são obtidas a partir da informação de vizinhança entre os tetraedros.

Uma outra consideração valiosa para a implementação do gerador de malhas refere-se à conectividade dos tetraedros da borda da triangulação. Entende-se por tetraedro de borda um tetraedro que possui, pelo menos, uma face na fronteira da triangulação. As estruturas de triangulação da biblioteca CGAL mantêm a consistência das adjacências desses tetraedros através do uso de um vértice “localizado no infinito”, ou simplesmente, vértice infinito. O vértice infinito é um vértice que não possui informações de geometria, isto é, este vértice possui apenas informações de conectividade. Todas as faces triangulares da fronteira de uma triangulação

3D estão conectadas ao vértice infinito, formando as células infinitas. O uso deste artifício pela biblioteca CGAL exige cuidado redobrado e esforço extra durante a implementação de qualquer método que possa modificar as fronteiras da triangulação. Na implementação do gerador de malhas restritas, a fronteira da triangulação pode ser modificada pelos seguintes métodos: inserção de pontos (na fronteira), pinça de *slivers* e, principalmente, entalhamento da triangulação durante a classificação dos simplejos.

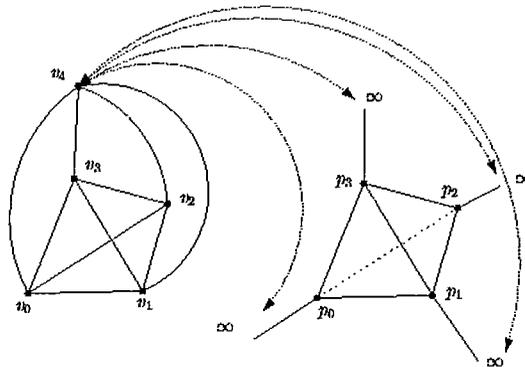


Figura 5.3: Representação do vértice infinito em uma malha com apenas um tetraedro.

## 5.2 Modelo de Entrada

O gerador de malhas implementado faz uso de um formato próprio de arquivo para leitura dos modelos de entrada. Isso se deve à complexidade adicional no tratamento de modelos com múltiplas regiões. Estes modelos, além de possuírem informações de geometria e conectividade, possuem também dados referentes aos atributos das superfícies e das regiões que os compõem. O gerador de malhas, na etapa de classificação de simplejos (Capítulo 3), atribui a cada tetraedro as propriedades referentes à região em que se encontra.

O esquema para representação do modelo no formato de entrada possui os seguintes elementos:

- Vértice: representa um vértice do modelo com suas coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  e com um identificador único chamado índice do vértice.

- Face: é formado por uma lista de índices de vértices que compõem uma face do modelo e por um identificador único chamado índice da face.
- Fragmento: é formado por uma lista de índices de faces que compõem o fragmento e por um identificador único chamado índice do fragmento. A grosso modo, cada fragmento corresponde a um retalho de alguma superfície usada na construção do modelo, isto é, um horizonte, uma falha ou uma face da caixa limitante do modelo. Tais superfícies são divididas em fragmentos, de tal forma que todas as faces de um mesmo fragmento separam o mesmo par de regiões. Um segundo requerimento é que todas as faces de um mesmo fragmento têm que estar associadas ao mesmo conjunto de atributos.
- Região: é formado por duas listas de índices de fragmentos, onde cada lista representa fragmentos cujos vértices das faces circulam no mesmo sentido. Desta forma, para uma dada região, a lista de faces é percorrida no sentido horário e para a região adjacente é percorrida no sentido anti-horário. A região possui também um identificador único chamado índice da região.
- Tabela de atributos de fragmentos: contém as propriedades de cada fragmento do modelo indexadas pelo índice de fragmento.
- Tabela de atributos de região: contém as propriedades de cada região do modelo indexadas pelo índice de região.

## 5.3 Resultados

O método implementado pelo gerador de malhas tem como objetivo gerar triangulações não-estruturadas para aplicações industriais. Para obtenção dos resultados, quatro modelos com diferentes características foram utilizados.

### 5.3.1 Modelo de peça mecânica

O gerador de malhas é capaz de produzir triangulações a partir de modelos que representam partes de equipamentos mecânicos. Neste caso, o modelo de entrada contém 5.096 pontos e 10.224 faces poligonais.

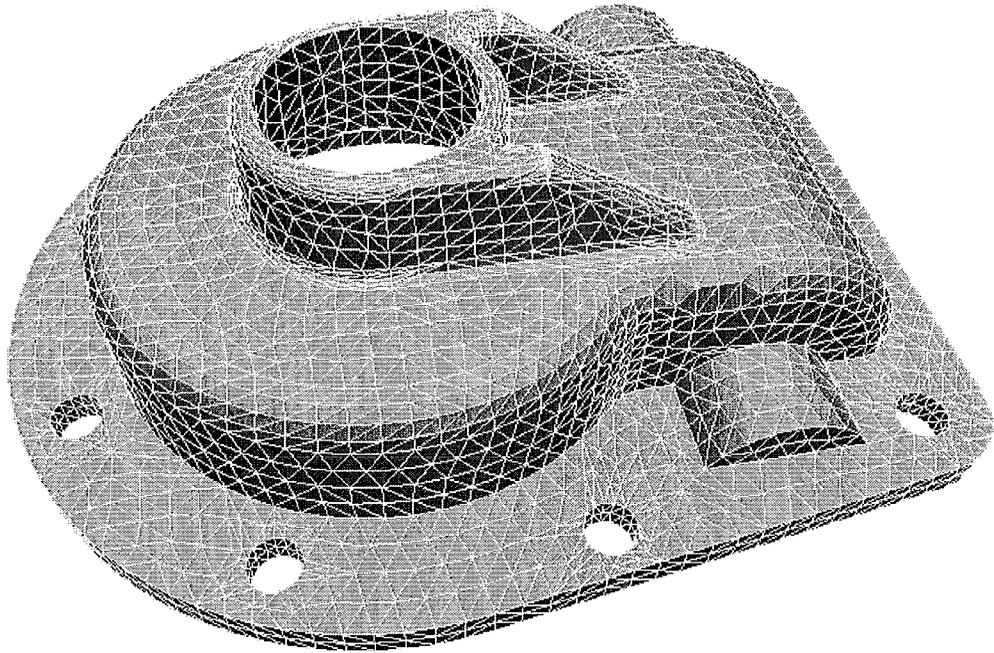


Figura 5.4: Modelo de uma peça mecânica.

Tabela 5.1: Dados das triangulações da peça mecânica.

Grade utilizada	Vértices	Tetraedros	Faces	Arestas	Memória
Sem grade	10.577	32.678	107.728	64.433	56 MB
Grade hexagonal	24.656	109.020	277.700	163.498	98 MB

### 5.3.2 Modelo geológico sintético com domo de sal

O gerador de malhas também é capaz de produzir malhas a partir de modelos que representam formações geológicas. Esta categoria de modelos geralmente é formada pela intersecção de conjuntos de superfícies poligonais e apresentam múltiplas regiões em seu interior. Neste exemplo, o modelo geológico é artificial, porém representa a formação de um domo de sal através das camadas geológicas. O modelo de entrada possui 1.883 vértices e 2.859 faces poligonais.

### 5.3.3 Modelo sintético com falhas geológicas

Da mesma forma que o modelo anterior, este é um exemplo de modelo artificial, porém este representa a presença de falhas geológicas ao longo das camadas. Este

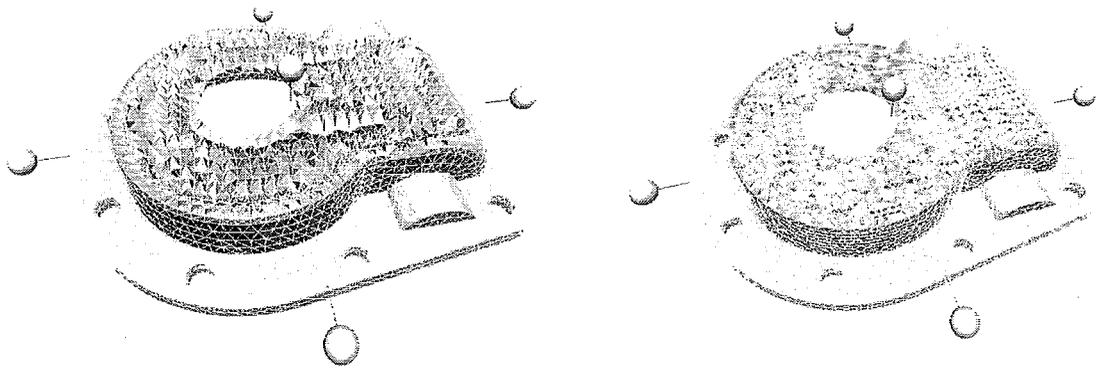


Figura 5.5: Duas triangulações da peça mecânica. À esquerda, a triangulação sem uso de grades. À direita, a triangulação utilizando uma grade hexagonal.

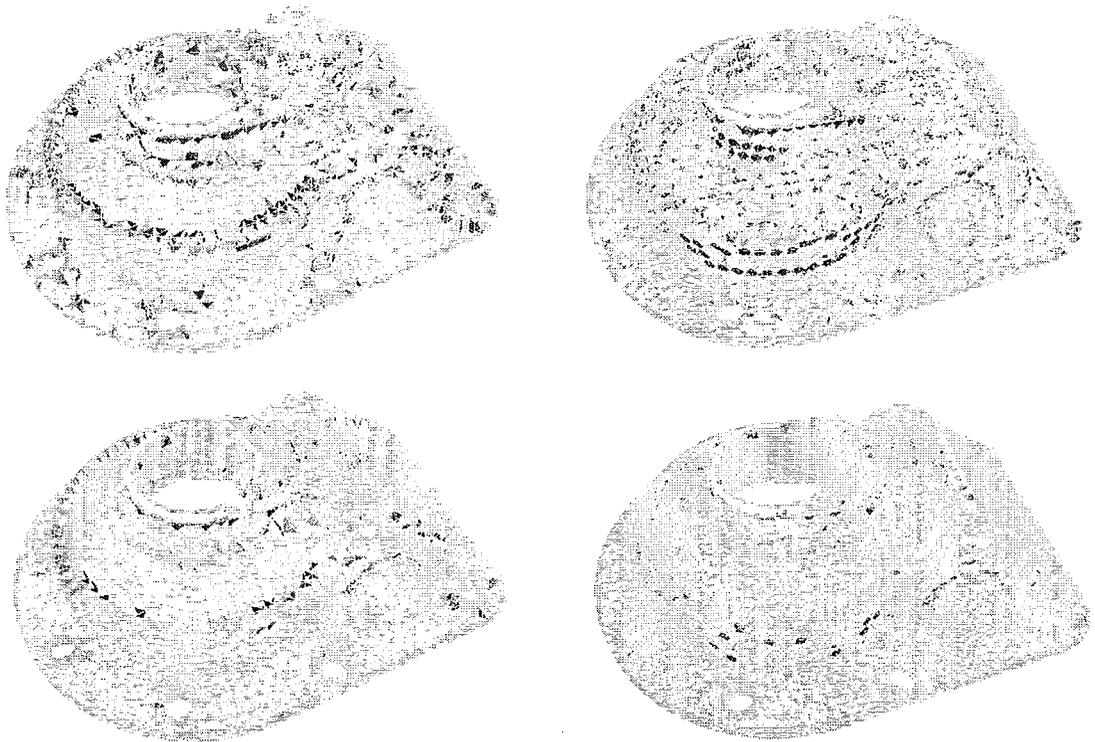


Figura 5.6: Tetraedros indesejáveis da peça mecânica. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada sem uso grades. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha.

Tabela 5.2: Dados do aprimoramento das triangulações da peça mecânica.

Grade utilizada	Tetraedros ruins antes	Tetraedros ruins após
Sem grade	2.401	816
Grade hexagonal	2.886	526

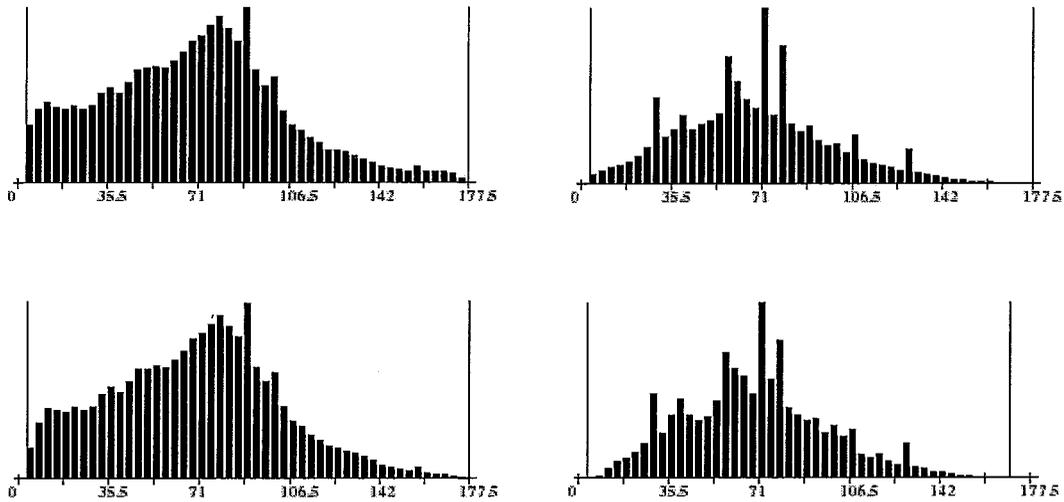


Figura 5.7: Histogramas dos ângulos diédricos da peça mecânica. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso grades. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha.

Tabela 5.3: Dados das triangulações do modelo com domo de sal.

Grade utilizada	Vértices	Tetraedros	Faces	Arestas	Memória
Grade cristalizada	4.465	23.948	50.992	29.962	46 MB
Grade hexagonal	67.380	392.400	811.876	473.319	117 MB

Tabela 5.4: Dados do aprimoramento das triangulações do modelo com domo de sal.

Grade utilizada	Tetraedros ruins antes	Tetraedros ruins após
Grade cristalizada	1.733	258
Grade hexagonal	1.807	105

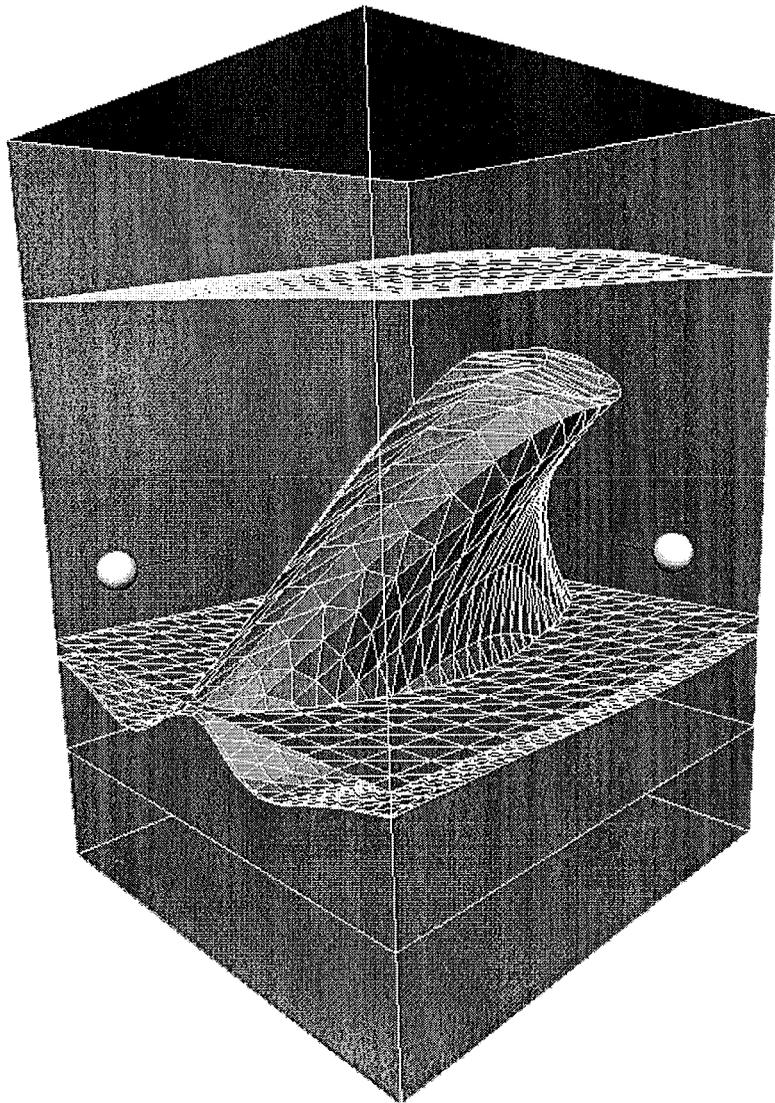


Figura 5.8: Modelo geológico sintético com domo de sal.

modelo possui, inclusive, intersecção entre suas duas falhas e, inicialmente, possui 217 vértices e 256 faces poligonais.

Tabela 5.5: Dados das triangulações do modelo com falhas geológicas.

Grade utilizada	Vértices	Tetraedros	Faces	Arestas	Memória
Sem grade	297	1.325	3.162	1.879	9 MB
Grade cúbica	9.578	50.461	111.206	65.182	28 MB

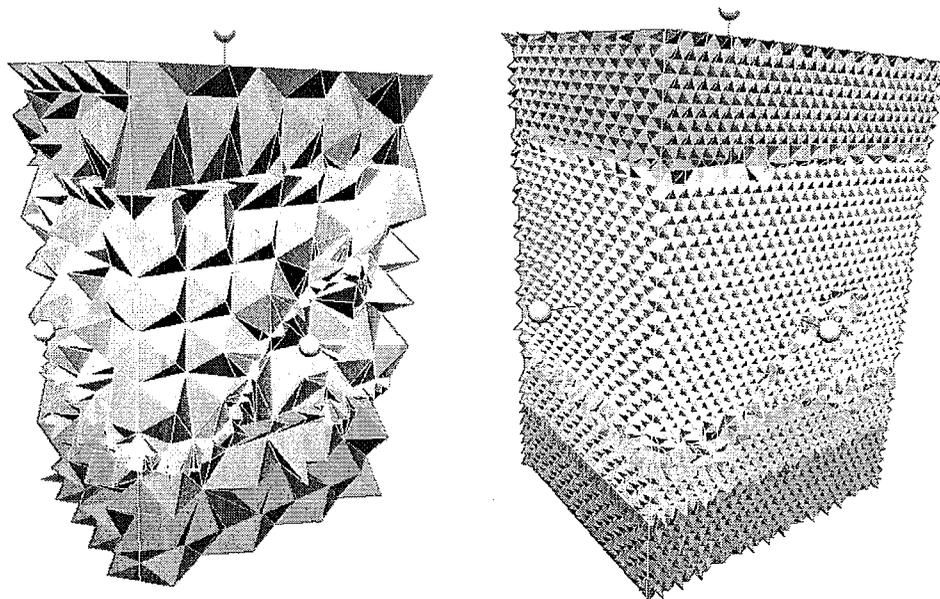


Figura 5.9: Duas triangulações do modelo geológico sintético com domo de sal. À esquerda, a triangulação gerada usando uma grade cristalizada. À direita, a triangulação utilizando uma grade hexagonal.

Tabela 5.6: Dados do aprimoramento das triangulações do modelo com falhas geológicas.

Grade utilizada	Tetraedros ruins antes	Tetraedros ruins após
Sem grade	80	34
Grade cúbica	130	5

### 5.3.4 Modelo geológico real do Golfo do México

Este é um modelo real da formação geológica do Golfo do México após a realização de uma operação de escala ao longo de um eixo. O modelo de entrada contém 31.426 vértices e 63.825 faces poligonais.

Tabela 5.7: Dados das triangulações do modelo do Golfo do México.

Grade utilizada	Vértices	Tetraedros	Faces	Arestas	Memória
Sem grade	221.158	1.198.780	2.578.632	1.510.475	404 MB
Grade cúbica	233.562	1.256.654	2.698.996	1.583.061	694 MB
Grade hexagonal	490.408	2.773.287	5.775.562	3.378.190	1.314 MB

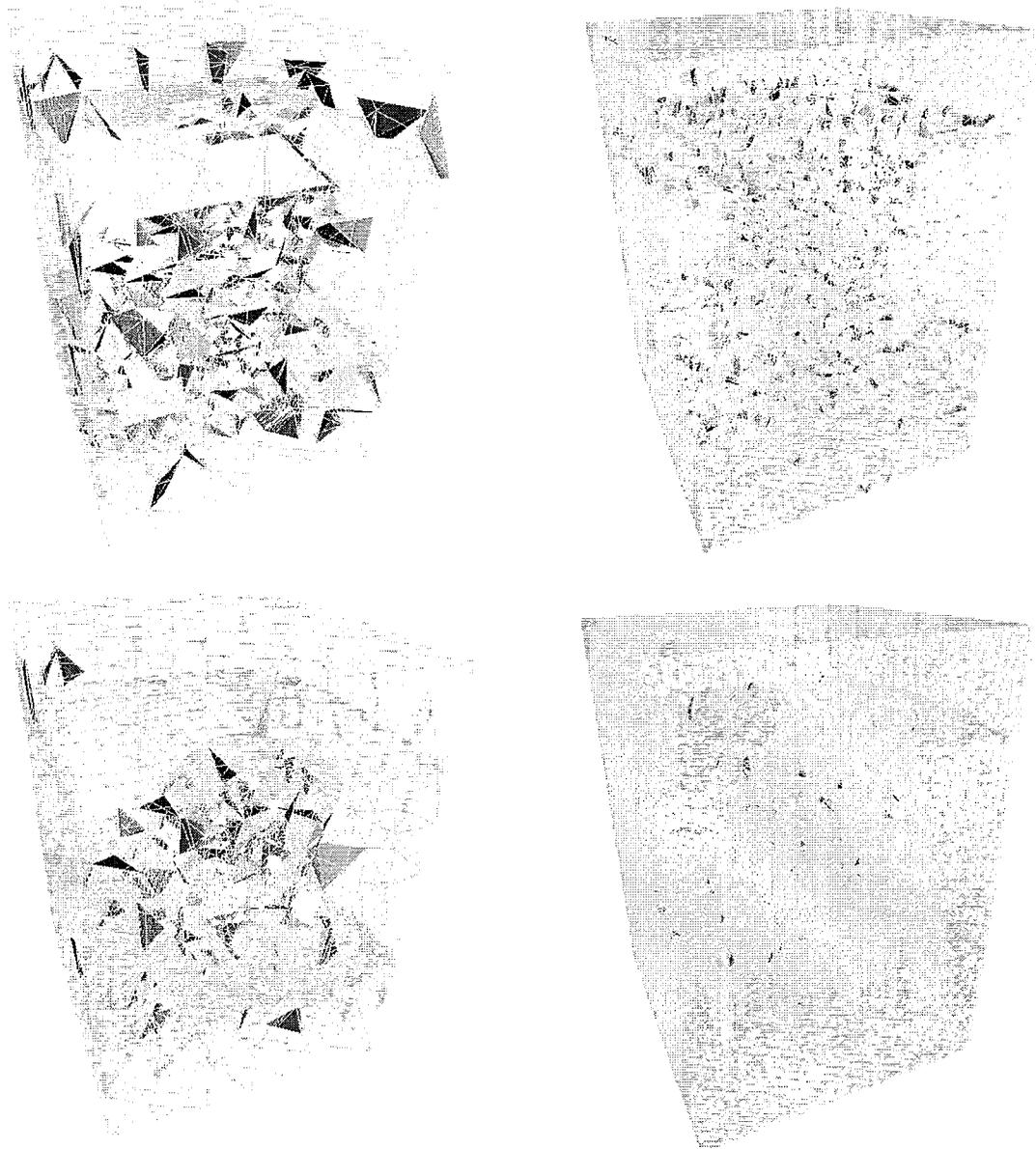


Figura 5.10: Tetraedros indesejáveis do modelo geológico sintético com domo de sal. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada usando uma grade cristalizada. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação gerada usando uma grade cristalizada após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha.

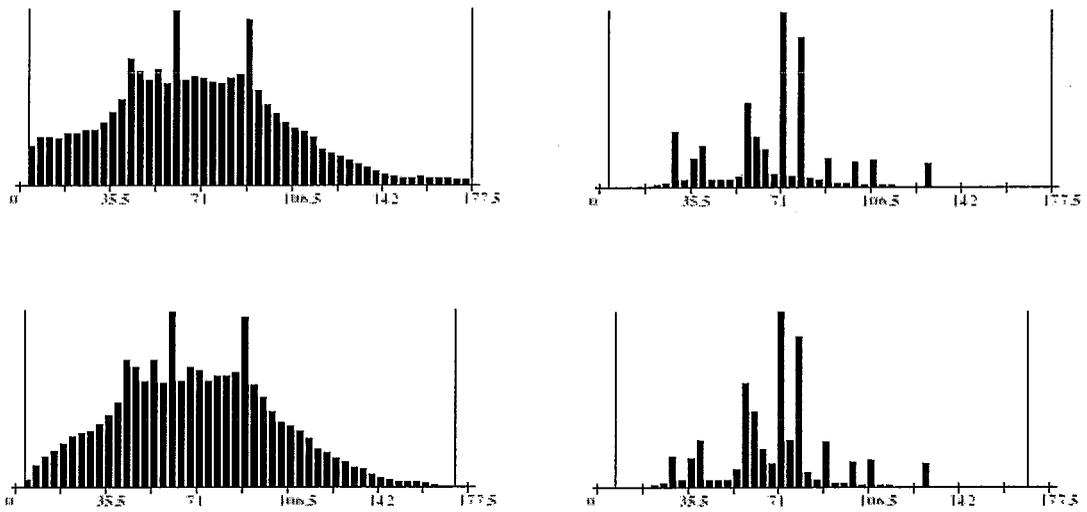


Figura 5.11: Histogramas dos ângulos diédricos do modelo geológico sintético com domo de sal. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada usando uma grade cristalizada. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação usando uma grade cristalizada após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha.

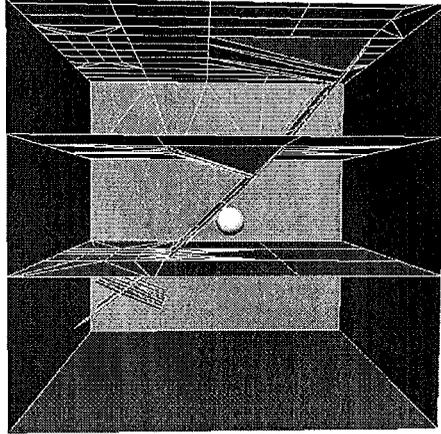


Figura 5.12: Modelo geológico sintético com falhas geológicas.

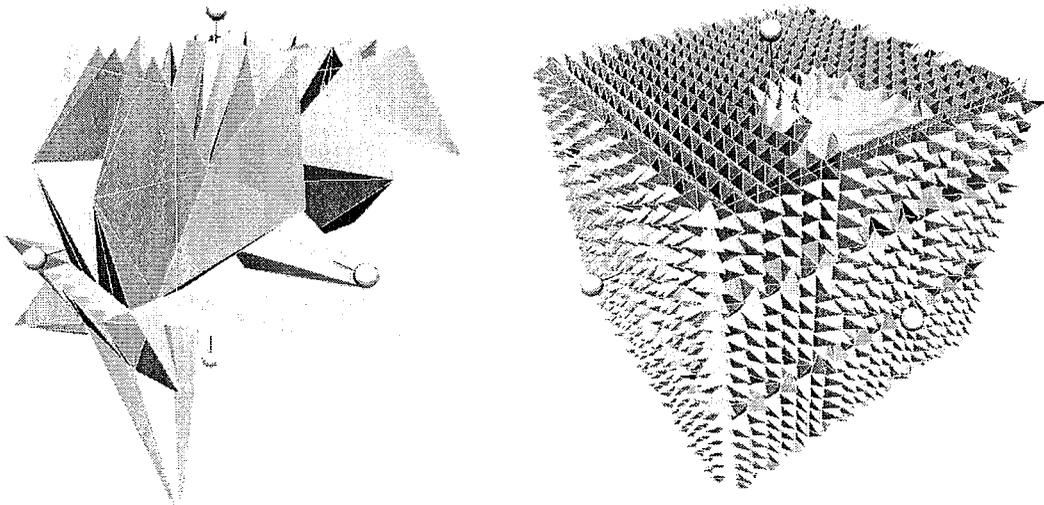


Figura 5.13: Duas triangulações do modelo geológico sintético com falhas geológicas. À esquerda, a triangulação gerada sem uso de grades. À direita, a triangulação utilizando uma grade cúbica.

Tabela 5.8: Dados do aprimoramento das triangulações do modelo do Golfo do México.

Grade utilizada	Tetraedros ruins antes	Tetraedros ruins após
Sem grade	95.934	51.706
Grade cúbica	98.632	45.391
Grade hexagonal	112.457	46.745

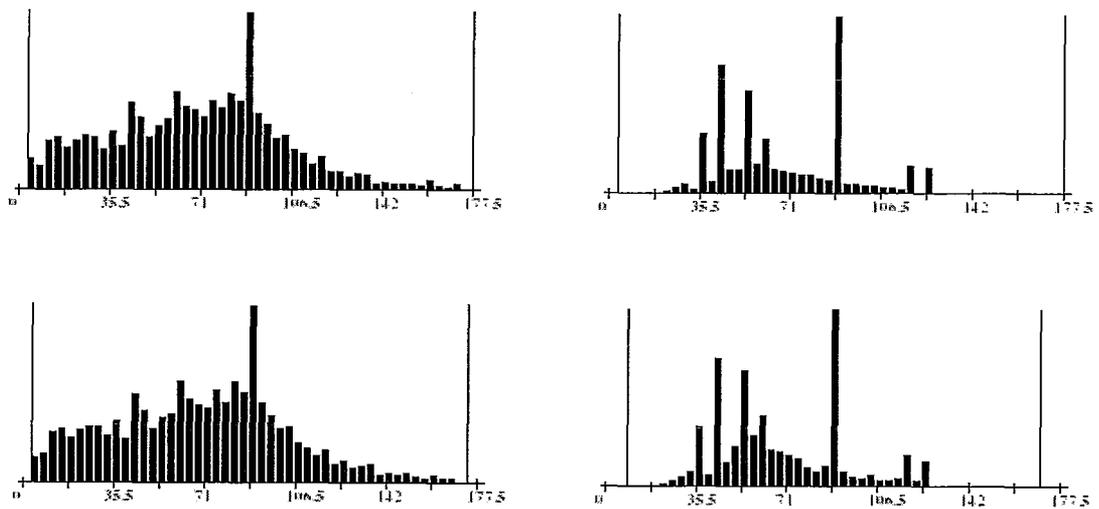


Figura 5.14: Histogramas dos ângulos diédricos do modelo geológico sintético com falhas geológicas. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha.

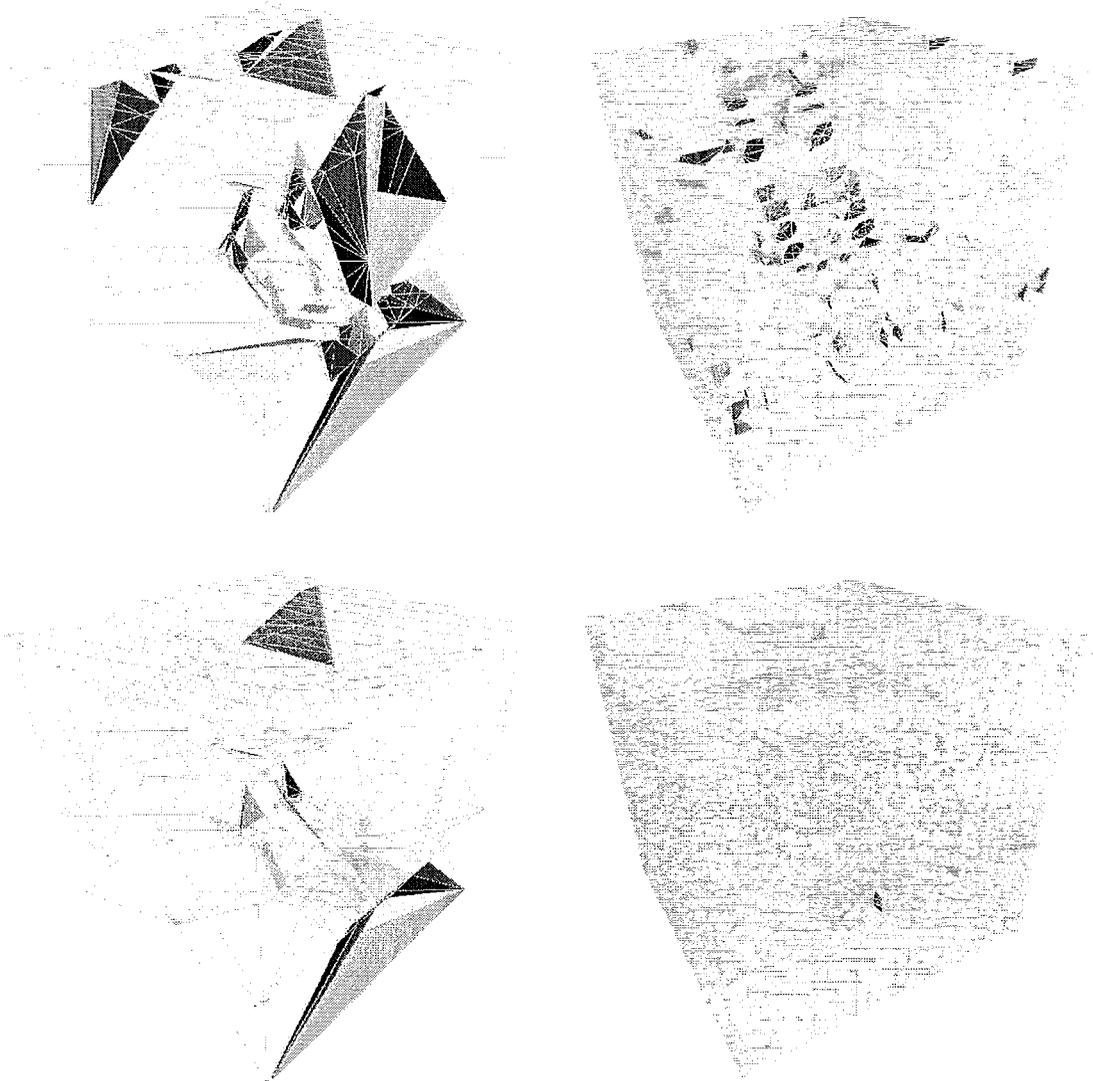


Figura 5.15: Tetraedros indesejáveis do modelo geológico sintético com falhas geológicas. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha.

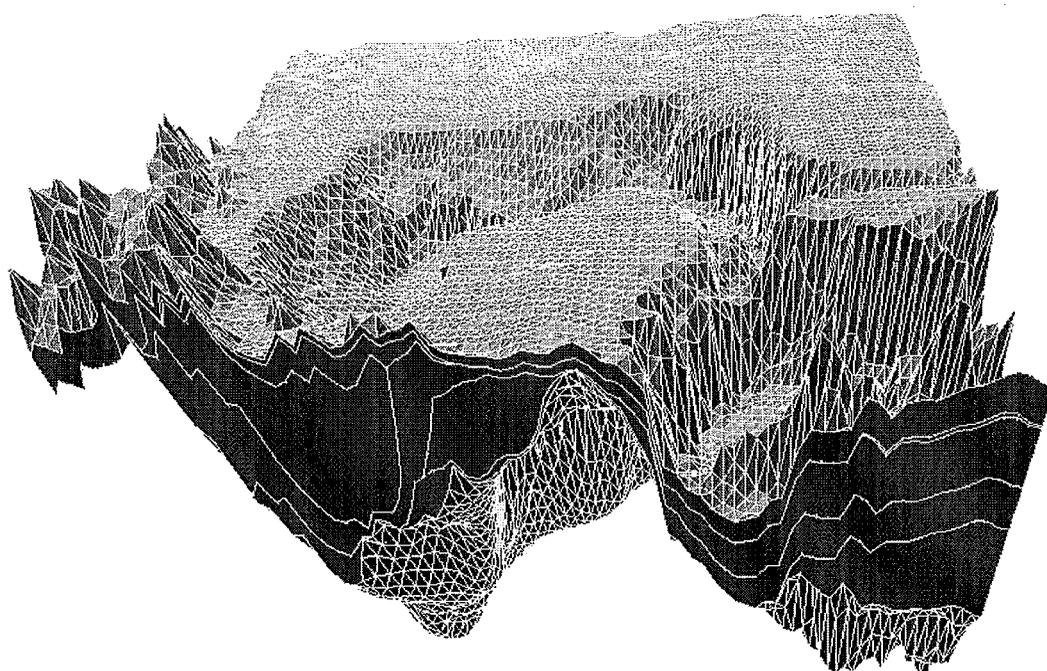


Figura 5.16: Modelo geológico real do Golfo do México.

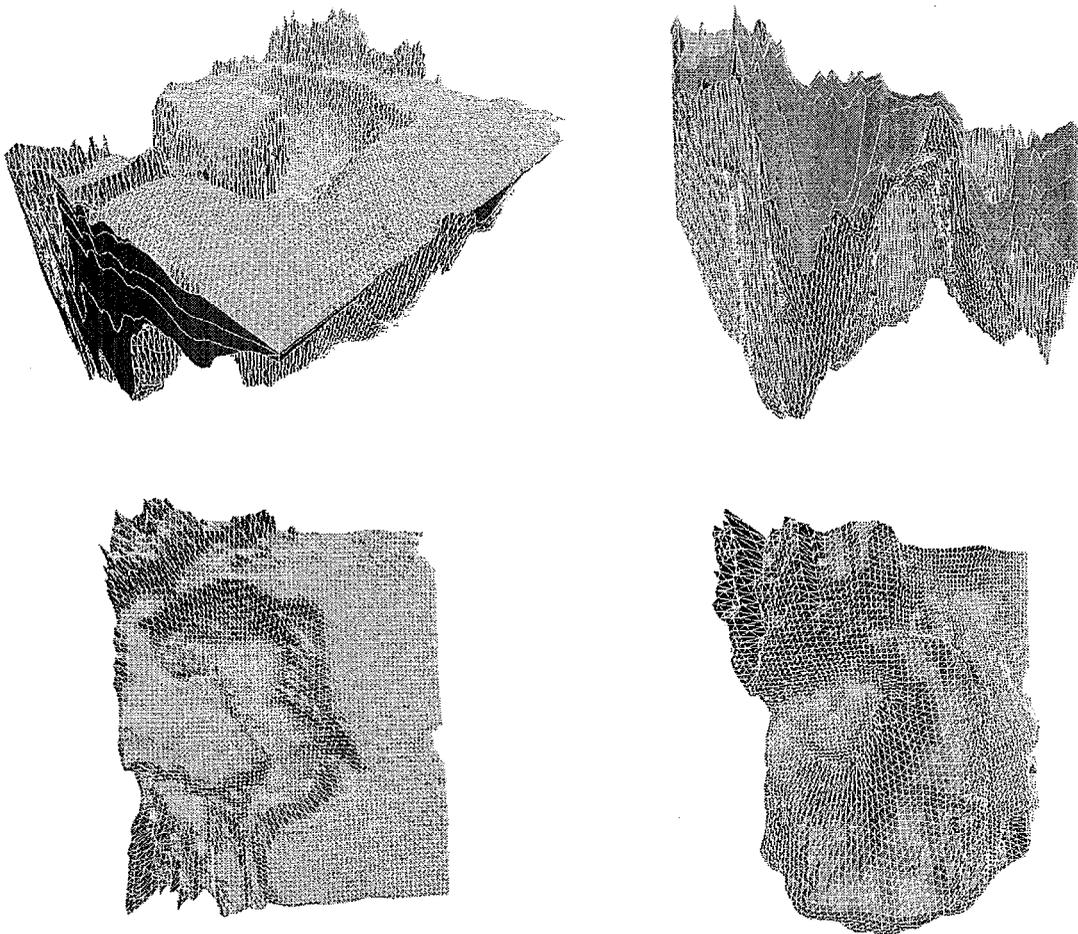


Figura 5.17: Diferentes visualizações do modelo do Golfo do México.

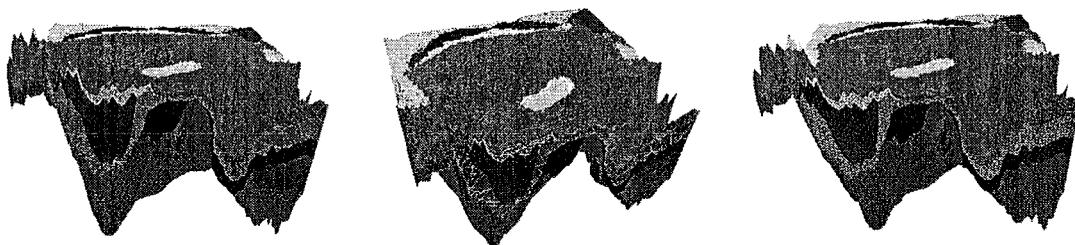


Figura 5.18: Três triangulações do modelo do Golfo do México. À esquerda, a triangulação gerada sem uso de grades. No centro, a triangulação utilizando uma grade cúbica. À direita, a triangulação utilizando uma grade hexagonal.

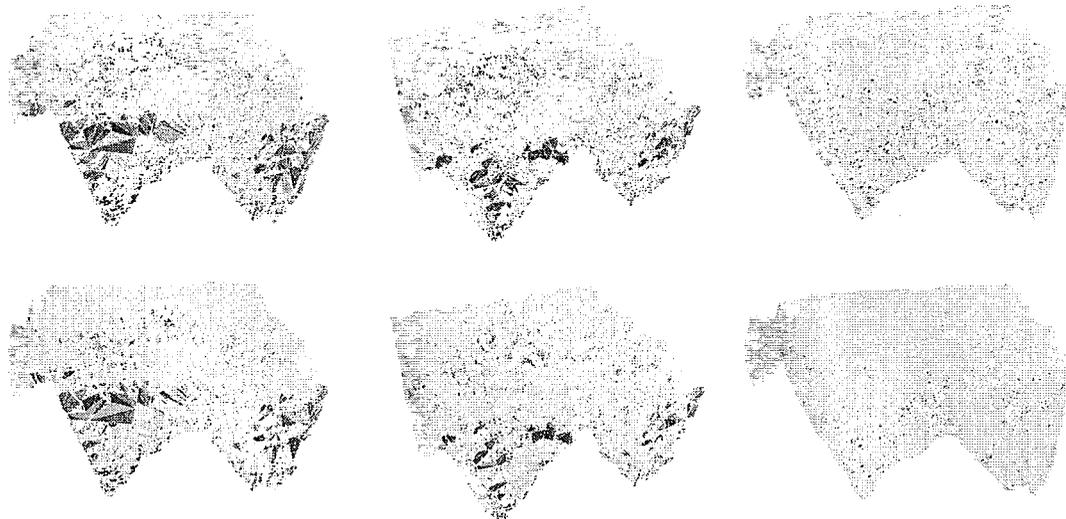


Figura 5.19: Tetraedros indesejáveis do modelo do Golfo do México. No canto superior esquerdo, os tetraedros ruins na triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, os tetraedros ruins da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. Na parte superior central, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica. Na parte inferior central, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, os tetraedros ruins na triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha.

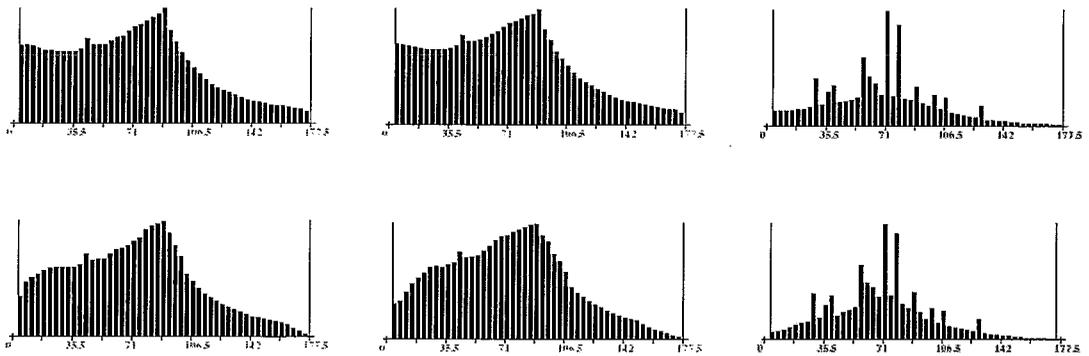


Figura 5.20: Histogramas dos ângulos diédricos do modelo do Golfo do México. No canto superior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades. No canto inferior esquerdo, o histograma da triangulação gerada sem uso de grades após o aprimoramento da malha. Na parte superior central, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica. Na parte inferior central, o histograma da triangulação usando uma grade cúbica após o aprimoramento da malha. No canto superior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal. No canto inferior direito, o histograma da triangulação usando uma grade hexagonal após o aprimoramento da malha.

# Capítulo 6

## Conclusões

Este trabalho apresentou um método robusto de geração de triangulações de Delaunay 3D restritas, cujo único requerimento é a consistência topológica dos polígonos que definem a fronteira do modelo de entrada. Além disso, foram apresentados operações e métodos que visam melhorar a qualidade da malha gerada.

Analisando questões referentes à robustez, a geração de triangulações de Delaunay tridimensionais não-restritas é simples e direta. Porém, a geração de triangulações de Delaunay 3D restritas requer um esforço considerável.

O gerador de malhas restritas implementado é uma valiosa ferramenta destinada a aplicações de engenharia e de geologia que fazem uso de Métodos de Elementos Finitos.

Em Geociências, criam-se modelos sísmicos com múltiplas regiões através da intersecção de conjuntos de superfícies poligonais. Essas operações de intersecção podem gerar vértices excessivamente próximos uns aos outros. Para testes e validação do gerador de malhas, foram utilizados modelos geológicos cujas distâncias entre vértices encontram-se entre  $10^{-7}$  e  $10^4$ . Apesar desta péssima distribuição de vértices, o gerador de malhas obteve sucesso ao triangular estes modelos.

Na abordagem utilizada, a inserção de pontos de Steiner para a recuperação de faces da restrição evita operações geométricas de intersecção. Para grande parte dos modelos, esta técnica é suficiente para gerar malhas de boa qualidade. Porém, em alguns casos, onde se encontram ângulos diédricos pequenos entre faces restritas, essa técnica pode falhar e não convergir. Esse problema é contornado através de um processo de retriangulação local nas faces de restrição que não podem ser recuperadas

apenas inserindo pontos de Steiner. Essas retriangulações locais requerem cálculos de intersecções, que não são desejáveis por causarem impacto na robustez de todo o processo.

## 6.1 Trabalhos Futuros

A presença de *slivers* em triangulações geradas para Métodos de Elementos Finitos é desastrosa. Diversas técnicas de remoção de *slivers* são desenvolvidas e introduzidas nos geradores de malhas. Novos algoritmos, técnicas e operações que os removam das triangulações podem ser pesquisados, implementados e testados em trabalhos futuros.

O uso de grades regulares mostra-se muito importante para a geração de malhas restritas de qualidade. Entretanto, dependendo da configuração da grade, um número excessivo e desnecessário de tetraedros é gerado. O uso de grades adaptativas soluciona este problema, além de ser uma excelente opção de pesquisa e desenvolvimento.

A criação de novas operações de aprimoramento da malha ajuda a enriquecer o repertório dos métodos de escalada. O aumento da variedade de operações é essencial para obter resultados cada vez melhores na etapa de melhoramento da malha.

Os agendamentos das operações que visam melhorar a qualidade das triangulações envolvem uma delicada questão: deseja-se melhorar a qualidade da malha, mas este processo não pode ter um desempenho ruim. O desenvolvimento de novos agendamentos que tentem minimizar o tempo gasto e maximizar a qualidade dos tetraedros é uma excelente e ampla opção para pesquisa.

# Referências Bibliográficas

- [1] SHEPHARD, M. S., GEORGES, M. K., “Automatic Three-dimensional Mesh Generation by the Finite Octree Technique”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 32, pp. 709–749, 1991.
- [2] SCHROEDER, W. J., SHEPHARD, M. S., “A Combined Octree/Delaunay Method for Fully Automatic 3-D Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 29, pp. 37–55, 1990.
- [3] WATSON, D. F., “Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes”, *The Computer Journal*, v. 24, n. 2, pp. 167–172, 1981.
- [4] JOE, B., “Three-dimensional Triangulations from Local Transformations”, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, v. 10, n. 4, pp. 718–741, July 1989.
- [5] JOE, B., “Construction of Three-dimensional Delaunay Triangulations using Local Transformation”, *Computer Aided Geometric Design*, v. 8, pp. 123–142, 1991.
- [6] SHEWCHUK, J. R., *Delaunay Refinement Mesh Generation*, Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1997.
- [7] LOHNER, R., “Generation of Three-Dimensional Unstructured Grids by the Advancing Front Method”. In: *Proceedings of the 26th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada, 1988.

- [8] BARTH, T., JESPERSON, D., “The Design and Application of Upwind Schemes on Unstructured Meshes”. In: *Proceedings of the 27th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada, 1989.
- [9] MAVRIPLIS, D. J., *An Advancing Front Delaunay Triangulation Algorithm Designed for Robustness*, Technical report 92-49, ICASE, October 1992.
- [10] LOHNER, R., “Progress in Grid Generation via the Advancing Front Technique”, *Engineering with Computers*, v. 12, pp. 186–210, 1996.
- [11] OWEN, S., “A survey of Unstructured Mesh Generation Technology”. In: *Proceedings of the Seventh International Meshing Roundtable*, Dearborn, Michigan, October 1998.
- [12] JOE, B., “Delaunay Versus Max-Min Solid Angle Triangulations for Three-Dimensional Mesh Generation”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 31, pp. 987–997, 1991.
- [13] BOWYER, A., “Computing Dirichlet Tessellations”, *Computer Journal*, v. 24, n. 2, pp. 162–166, 1981.
- [14] CAVALCANTI, P. R., MELLO, U. T., “Three-dimensional Constrained Delaunay Triangulation: a Minimalist Approach”. In: *Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable*, pp. 119–129, Lake Tahoe, CA, October 1999.
- [15] HAZLEWOOD, C., “Approximating Constrained Tetrahedralizations”, *Computer Aided Geometric Design*, v. 10, pp. 67–87, 1993.
- [16] WEATHERILL, N. P., HASSAN, O., “Efficient Three-dimensional Delaunay Triangulation with Automatic Point Creation and Imposed Boundary Constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, pp. 2005–2039, 1994.
- [17] ROBINSON, E., TREITEL, S., *Geophysical Signal Analysis*. Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1980.

- [18] “Gocad Research Group”,  
<http://www.gocad.org>.
- [19] O’ROURKE, J., *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press:  
 New York, 1994.
- [20] PREPARATA, F. P., SHAMOS, M. I., *Computational Geometry: An Introduction*. Springer-Verlag: New York, 1985.
- [21] LAWSON, C., “Transforming Triangulations”, *Discrete Math.*, v. 3, pp. 365–  
 372, 1972.
- [22] WEATHERILL, N. P., “Delaunay Triangulation in Computational Fluid Dy-  
 namics”, *Computers and Mathematics with Applications*, v. 24, n. 5/6,  
 pp. 129–150, September 1992.
- [23] RUPPERT, J., *Results on Triangulation and High Quality Mesh Generation*,  
 Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, University of California  
 at Berkeley, Berkeley, CA, 1992.
- [24] BOISSONNAT, J.-D., “Shape Reconstruction from Planar Cross Sections”,  
*Computer Vision, Graphics and Image Processing*, v. 44, pp. 1–29, 1988.
- [25] CAVALCANTI, P. R., CARVALHO, P. C., MARTHA, L. F., “Nonmanifold  
 Modeling: An Approach Based on Spatial Subdivisions”, *Computer-Aided  
 Design*, v. 29, n. 3, pp. 209–220, March 1997.
- [26] MELLO, U. T., CAVALCANTI, P. R., “A Topologically-based Framework for  
 Simulating Complex Geological Processes”. In: *Proceedings of the AAPG  
 Hedberg Conference-Basin Modeling*, Colorado Springs, CO, May 1999.
- [27] FREITAG, L., OLLIVER-GOOCH, C., “Tetrahedral Mesh Improvement using  
 Face Swapping and Smoothing”, *International Journal for Numerical  
 Methods in Engineering*, v. 40, pp. 3979–4002, 1997.
- [28] KLINGNER, B. M., SHEWCHUK, J. R., “Agressive Tetrahedral Mesh Impro-  
 vement”. In: *Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable*,  
 pp. 3–23, Oct. 2007.

- [29] HERMANN, L. R., “Laplacian-isoparametric grid generation scheme”, *J. of the Eng. Mechanics Div. of the American Soc. of Civil Engineers*, v. 102, pp. 749–756, 1976.
- [30] FREITAG, L., JONES, M., PLASSMANN, P., “A Parallel Algorithm for Mesh Smoothing”, *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 20, n. 6, pp. 2023–2040, 1999.
- [31] CAVENDISH, J. C., FIELD, D. A., FREY, W. H., “An approach to automatic three-dimensional finite element mesh generation”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, v. 21, pp. 329–347, 1985.
- [32] TALMOR, D., *Well-Spaced Points for Numerical Methods*, Ph.D. Thesis, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, August 1997, CMU CS Tech Report CMU-CS-97-164.
- [33] CHEW, L. P., “Guaranteed-quality Delaunay meshing in 3D (short version)”. In: *SCG '97: Proceedings of the thirteenth annual symposium on Computational geometry*, pp. 391–393, ACM: New York, NY, USA, 1997.
- [34] CHENG, S.-W., DEY, T. K., EDELSBRUNNER, H., et al., “Sliver exudation”. In: *SCG '99: Proceedings of the fifteenth annual symposium on Computational geometry*, pp. 1–13, ACM: New York, NY, USA, 1999.
- [35] EDELSBRUNNER, H., LI, X.-Y., MILLER, G., et al., “Smoothing and cleaning up slivers”. In: *STOC '00: Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 273–277, ACM: New York, NY, USA, 2000.
- [36] KRÍŽEK, M., “On the maximum angle condition for linear tetrahedral elements”, *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 29, n. 2, pp. 513–520, 1992.
- [37] SHEWCHUK, J. R., “What is a good linear element? interpolation, conditioning, and quality measures”. In: *In 11th International Meshing Roundtable*, pp. 115–126, 2002.
- [38] JOE, B., “Construction of Three-Dimensional Improved-Quality Triangulations Using Local Transformations”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 16, n. 6, pp. 1292–1307, 1995.

- [39] “Standard Template Library”,  
<http://www.sgi.com/tech/stl>.
- [40] “Computational Geometry Algorithms Library”,  
<http://www.cgal.org>.
- [41] “GNU Multi-Precision Library”,  
<http://www.gmpilib.org>.