

# CONSTRUÇÃO HIERÁRQUICA DE SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS

**Helena Cristina da Gama Leitão**

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

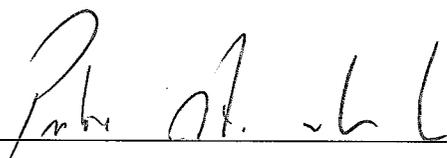
Aprovada por:



---

Prof. Ronaldo Cesar Marinho Persiano, D. Sc.

(Presidente)



---

Prof. Protásio Dutra Martins Filho, Ph.D.



---

Prof. Luiz Satoru Ochi, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO DE 1991

**LEITÃO, HELENA CRISTINA DA GAMA**

Construção Hierárquica de Superfícies  
Paramétricas [Rio de Janeiro] 1991  
VII + 80p. 29, 7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação,  
1991)  
Tese – Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE  
I. Splines I. COPPE/UFRJ  
II Título (série).

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

## **CONSTRUÇÃO HIERÁRQUICA DE SUPERFÍCIES PARAMÉTRICAS**

**Helena Cristina da Gama Leitão**

**Setembro de 1991**

Orientador: Prof. Ronaldo Cesar Marinho Persiano

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho aborda alguns tópicos ligados a modelagem geométrica de superfícies splines utilizando-se as funções de base B-Spline. É apresentada uma proposta para a geração incremental de novas superfícies a partir de superfícies já construídas. Para tal são exploradas algumas propriedades da base B-Spline e utilizados algoritmos de inserção de nós e refinamento.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

## **HIERARCHICAL CONSTRUCTION OF PARAMETRIC SURFACES**

**Helena Cristina da Gama Leitão**

**September, 1991**

Thesis Supervisor: Prof. Ronaldo Cesar Marinho Persiano

Department: Engenharia de Sistemas e Computação

This work covers some aspects related to the use of B-Spline functions in geometric modeling. It is presented an incremental generation of new surfaces from others. The knot insertion algorithms and refinement of B-Splines are used to implement this proposal.

Dedico este trabalho a mamãe, vovó e a você...

**AGRADECIMENTOS:**

A minha mãe, Selma, a minha avó, Diva e a meus irmãos pelo carinho e pela compreensão.

Ao professor Marinho, por sua valiosa orientação, amizade e paciência, imprescindíveis na realização deste trabalho.

Aos amigos Marco Aurélio e Luiz Renato pela amizade.

Aos colegas e amigos do L.C.G. , dentre eles João Luiz, Luiz Lima, Vítor, Marcelo Salim , André, Luiz Paulo, pelo apoio e companheirismo .

Ao grande amigo, Leonardo por sua importante colaboração para que este trabalho fosse realizado, discutindo, sugerindo e confiando em mim.

Ao Ricardo e Alberto pela amizade e suporte no L.C.G.

A todo pessoal de Sistemas, em especial às professoras Dina e Lídia, por minha admissão na COPPE, e Denise e Cláudia pelo auxílio e simpatia.

Ao apoio da Universidade Federal Fluminense na conclusão deste trabalho.

A CAPES e à Fundação Guilherme Guinle pelo apoio financeiro.

A todos que, embora, não citados aqui colaboraram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse concluído.

## Sumário

---

<b>Capítulo I – Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo II – Modelagem de curvas e superfícies .....</b>	<b>3</b>
II.1 – Forma paramétrica .....	3
11.2 – Curvas de Bézier .....	4
11.3 – Curvas splines .....	10
II.3.1 – Método De Boor .....	13
11.4 – Superfícies .....	14
11.5 – Considerações finais .....	16
<b>Capítulo III – Refinamento de curvas e superfícies splines ...</b>	<b>18</b>
III.1 – Idéia geral .....	18
111.2 – Boehm .....	22
111.3 – Oslo .....	23
III.3.1 – Prova informal do algoritmo de Oslo .....	24
III.4 – Outras técnicas para inserção de nós .....	27
III.5 – Utilidade do algoritmo de Oslo neste trabalho .....	28
III.5.1 – Inserção de nós em superfícies .....	28
111.6 – Conclusão .....	30

<b>Capítulo IV – Aplicações de refinamento de superfícies . . . . .</b>	<b>32</b>
IV.1 – Principais abordagens . . . . .	32
IV.2 – Descrição do problema abordado . . . . .	34
IV.3 – Aplicações . . . . .	36
IV.4 – Conclusão . . . . .	36
<b>Capítulo V – Colagem de superfícies . . . . .</b>	<b>37</b>
V.I – Idéia geral . . . . .	37
V.2 – Métodos de adoçamento . . . . .	43
V.3 – Unificação de bases . . . . .	46
V.4 – Localização . . . . .	48
V.5 – Considerações finais . . . . .	50
<b>Capítulo VI – Representação hierárquica . . . . .</b>	<b>51</b>
VI.1 – Idéia geral . . . . .	51
VI.2 – Estruturas Hierárquicas . . . . .	53
VI.3 – Manipulação de superfícies hierárquicas . . . . .	54
VI.4 – Avaliação de pontos, curvas e superfícies . . . . .	57
VI.4.1 – Seleção das superfícies a serem percorridas . . . . .	58
VI.4.2 – Avaliação de um ponto . . . . .	59
VI.4.3 – Avaliação de uma curva . . . . .	60
VI.5 – Localização das superfícies . . . . .	61
VI.6 – Uniformização de superfícies . . . . .	63
VI.7 – Colagem de superfícies . . . . .	63
VI.8 – Considerações finais . . . . .	

<b>Capítulo VII – Avaliação dos resultados</b> .....	<b>67</b>
VII.1. Critério adotado – Curvatura .....	67
VII.2 – Curvatura de uma curva .....	68
VII.3 – Curvatura de uma superfície (K) .....	68
VII.4 – Exemplos .....	69
VII.5 – Conclusões finais .....	76
<b>Referências Bibliográficas</b> .....	<b>77</b>

# Capítulo I

## Introdução

Neste trabalho abordaremos alguns tópicos da Modelagem Geométrica, que é a área da Computação Gráfica que se dedica ao estudo de modelos de representação baseados nas características geométricas do objeto, bem como no desenvolvimento de algoritmos que permitam sua manipulação ( MORTENSON[3] ), dentro desta área encontram-se a Modelagem de Sólidos ( ESPERANÇA[25], MANTILA[26] ) e a Modelagem de Curvas e Superfícies Suaves ( BARTELS e outros[4], FARIN[14] ) sendo esta última focalizada neste trabalho.

Nos últimos anos a busca de uma representação matemática computacionalmente eficiente para descrever formas suaves tem ocupado muitos pesquisadores da área de Modelagem Geométrica. Dentre as formas para se representar curvas com certo grau de suavidade, destacam-se as curvas geradas por funções B-Spline, que possuem características interessantes do ponto de vista computacional, garantindo um grau satisfatório de flexibilidade para a maioria das aplicações a que se destinam .

Entretanto, modelar superfícies com um maior detalhamento sobre uma outra superfície construída ou mesmo modelar tal superfície em separado para depois junta-la a outra também já construída são situações que apresentam uma série de restrições. É apresentado aqui um estudo a respeito do tema, sendo ao final feita uma proposta para o caso de se compor superfícies já modeladas visando-se a criação de uma nova superfície.

O presente trabalho apresenta-se dividido em sete capítulos : O primeiro é este, onde é dada uma introdução ao trabalho. O segundo é dedicado a uma breve compilação dos modelos de curvas e superfícies splines, além de fornecer a nomenclatura utilizada e a uma série de conceituações importantes para a compreensão dos capítulos posteriores.

O terceiro capítulo apresenta a definição de refinamento de uma superfície e descreve alguns métodos para fazê-lo, detendo-se mais detalhadamente nos métodos de inserção de nós de Boehm e de Oslo , cuja utilização neste trabalho será explicada mais tarde.

Segue-se no capítulo IV uma explanação a respeito do que se encontra na literatura sobre modelagem de superfícies destacando-se aquelas com reentrâncias e saliências, sendo discutido também o problema específico abordado neste trabalho: Dadas duas superfícies splines como proceder à colagem de uma das superfícies sobre uma área limitada da outra de maneira a manter a suavidade nas juntas de encaixe.

No quinto capítulo é detalhado o método utilizado para fazer a sobreposição de superfícies mantendo-se condições satisfatórias de suavidade nas juntas.

No sexto capítulo é apresentada a forma implementada onde é feito o refinamento das superfícies B-Splines envolvidas e é utilizada a idéia de modelo hierárquico para representação das mesmas.

No sétimo capítulo são apresentadas uma avaliação dos resultados encontrados e conclusões a respeito do trabalho realizado.

## Capítulo II

### Modelagem de curvas e superfícies

Modelagem geométrica é um termo que se refere a uma coleção de métodos usados para se definir e manipular características geométricas de um objeto, ou seja criar modelos matemáticos de representação e algoritmos que permitam sua manipulação.

O material deste capítulo servirá como fundamento para a compreensão dos demais, além de fornecer um panorama das principais técnicas de modelagem de curvas e superfícies. Apresentaremos inicialmente a forma paramétrica de representação de curvas e superfícies; em seguida, veremos as definições de curvas de Bezier–Bernstein. Logo após, definiremos curvas e superfícies splines geradas por funções B–Spline. Por fim, serão mostradas algumas aplicações para curvas e superfícies suaves representadas na base B–Spline e feita uma conclusão à respeito do material exposto.

É bom esclarecer que não nos preocuparemos em justificar os resultados apresentados. Caso o leitor esteja interessado em maiores detalhes, poderá buscá-los em BARTELS e outros[4], FARIN[14], FAUX[21] e MORTENSON[3].

#### II.1 – Forma paramétrica

Em sua forma mais geral, uma curva no plano em sua forma paramétrica seria expressa por uma função de um intervalo  $[a,b]$  com valores no plano. Cada ponto  $P(u)$  da curva, com  $u \in [a,b]$  seria expresso por suas coordenadas  $(X(u), Y(u))$  e por isso a curva seria

caracterizada pelas funções reais  $X(\cdot)$  e  $Y(\cdot)$ . Usualmente utilizaremos os parâmetros no intervalo normalizado  $\left( u_{\text{normalizado}} = \frac{u_{ab} - a}{b - a} \right)$ .

Curvas suaves descritas por funções polinomiais merecem atenção especial na modelagem geométrica. Além de infinitamente diferenciáveis estas funções são fáceis de serem avaliadas existindo para tal métodos computacionalmente eficientes.

O espaço de funções polinomiais é um espaço vetorial (BARTELS[4]). Fixando-se um grau  $K$ , é possível estabelecer uma base (composta de  $K+1$  polinômios linearmente independentes). Desse modo combinando-se linearmente tais polinômios com coeficientes reais é possível gerar se todo o espaço de polinômios de grau  $K$ . Logo uma função polinomial de grau  $K$  pode ser expressa da seguinte maneira:

$$p(u) = \sum_{i=0}^K a_i f_i(u) \quad (1)$$

sendo:

$a_i$  escalares,

$f_i(\cdot)$  funções polinomiais de base.

No caso de curvas polinomiais na forma paramétrica, cada coordenada seria descrita pela expressão acima, ou seja, cada coordenada seria expressa por um conjunto de coeficientes reais associados à funções polinomiais de base ( $f_i(\cdot)$ ).

A curva polinomial mais simples seria o segmento de reta, que é um polinômio de grau 1. Para descrevê-la deveremos fixar um conjunto de funções de base e escolhermos os coeficientes  $a_i$ 's. O ideal é que os  $a_i$ 's fornecidos dêem alguma noção da geometria da curva, já que estes são fixados para cada uma das coordenadas. Para isso deveremos escolher uma base conveniente.

## II.2 – Curvas de Bézier

Para escrever uma curva polinomial de grau 1 podemos escolher os seguintes polinômios de base:

$$f_0(u) = u, \quad f_1(u) = (1 - u)$$

E dados dois coeficientes (supondo a curva no  $\mathbb{R}^2$ ) para cada coordenada:  $ax_0, ax_1$  para a função  $X(\cdot)$  e  $ay_0, ay_1$  para a função  $Y(\cdot)$ , podemos escrever então:

$$X(u) = ax_1 u + ax_0 (1 - u)$$

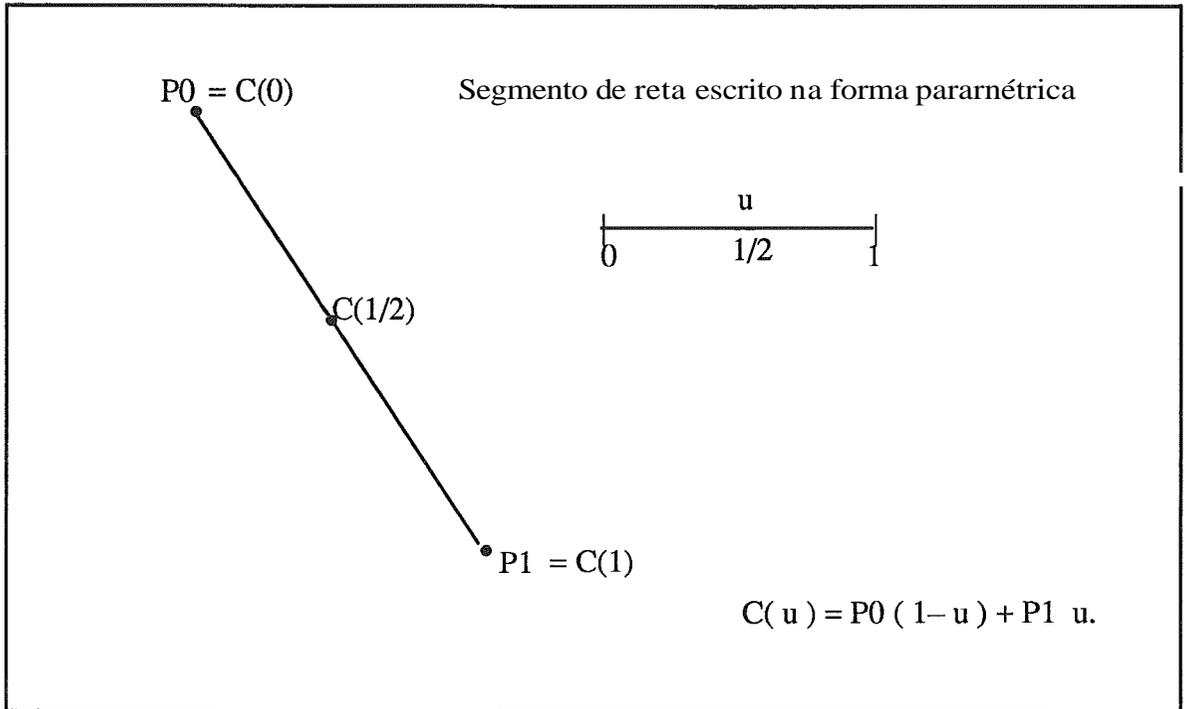
$$Y(u) = ay_1 u + ay_0 (1 - u)$$

Se  $u = 0$  teremos que  $(X(0), Y(0))$  será exatamente  $(ax_0, ay_0)$  que são as coordenadas de um ponto  $P_0$ .

Se  $u = 1$  teremos que  $(X(1), Y(1))$  será exatamente  $(ax_1, ay_1)$  que são as coordenadas de um ponto  $P_1$ .

Se  $u \in (0, 1)$  o valor das funções  $(X(u), Y(u))$  serão as coordenadas de um ponto sobre o segmento de reta que une os pontos  $P_0$  e  $P_1$ .

Neste caso, a base escolhida faz com que os coeficientes tenham uma interpretação geométrica bastante forte: eles são as coordenadas dos pontos extremos do segmento. (vide Fig.II.1).



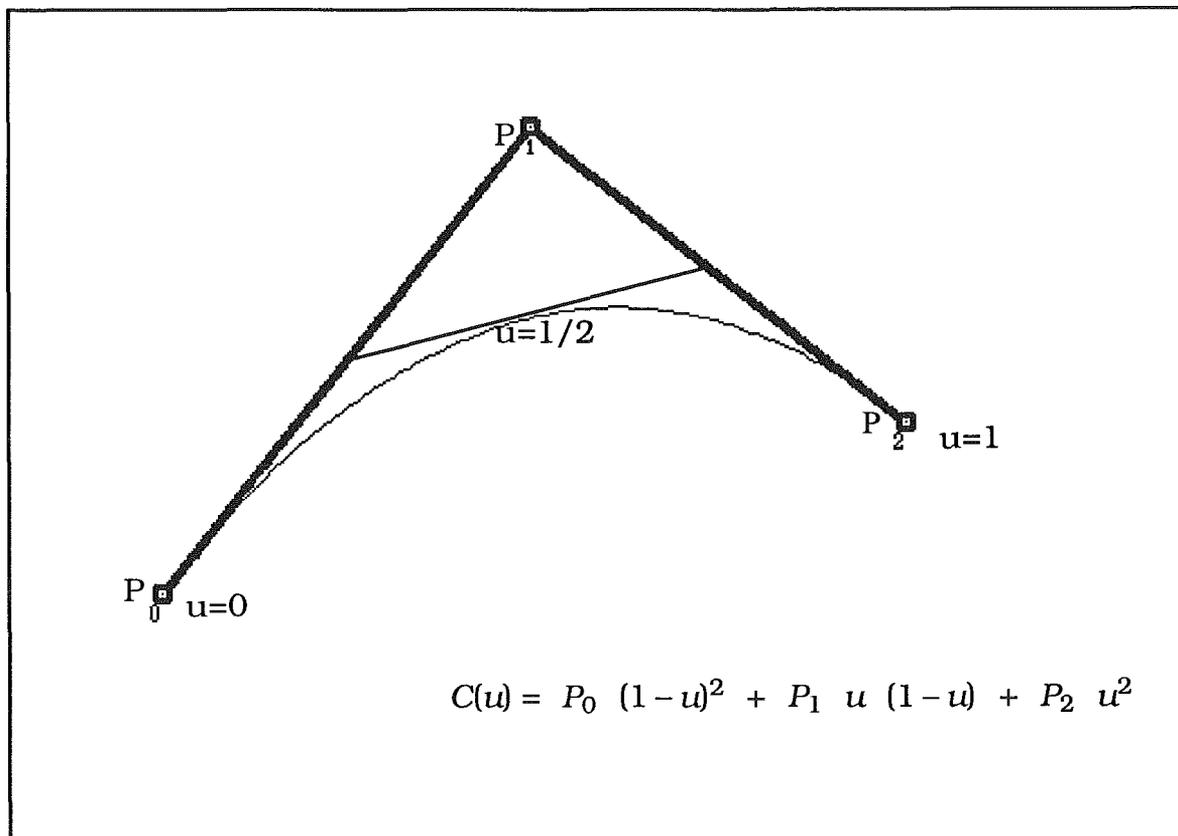
FigII.1 Forma paramétrica de um segmento de reta.

Para  $u = 1/2$  estaremos exatamente na metade do segmento de reta que une  $P_0$  a  $P_1$ .

Para as curvas polinômiais de grau 2 podemos escolher os seguintes polinômios:

$$f_0(u) = u^2, \quad f_1(u) = 2u(1-u) \quad e \quad f_2(u) = (1-u)^2$$

Se aplicarmos a equação 1, tendo como coeficientes das funções de base os valores de cada coordenada dos pontos do espaço  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, descrevemos a forma paramétrica de uma curva de grau 2; ou seja, fixando-se o valor de  $u$ , se fizermos uma combinação linear dos coeficientes, que são as coordenadas dos pontos do espaço dados, pelos pesos fornecidos pelas funções de base, obteremos as coordenadas de um ponto da curva de grau 2. Considerando o arco de parábola resultante da variação do parâmetro  $u$  no intervalo  $[0,1]$  observaremos que ele interpola os pontos extremos  $P_0$ ,  $P_2$  (vide Fig.II.2) e passa "perto" do ponto  $P_1$ .



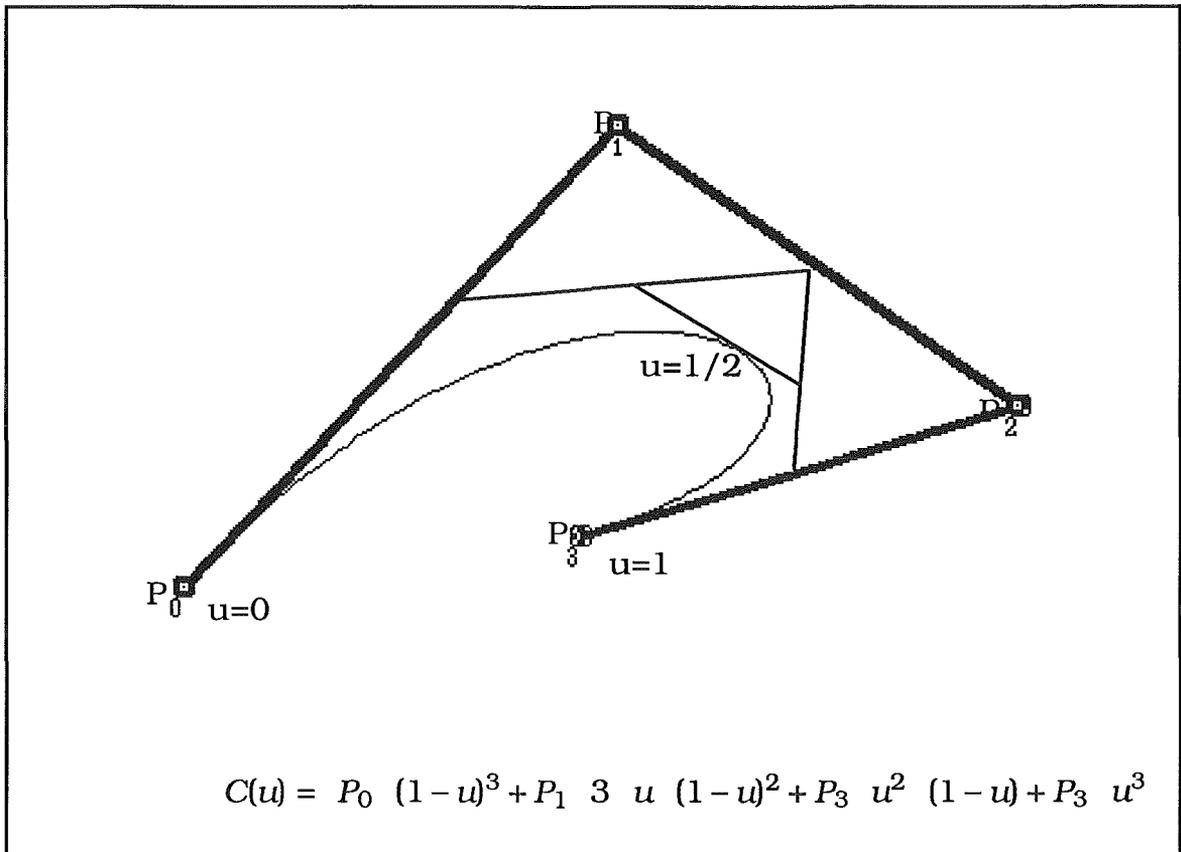
*Fig.II.2 Curva polinomial de grau 2.*

O segmento de reta que une  $P_1$  a  $P_0$  tem a mesma direção da tangente a curva no ponto  $P_0$  ( $C(0)$ ). Do mesmo modo o segmento de reta que une  $P_2$  a  $P_1$  tem a mesma direção da tangente a curva no ponto  $P_2$  ( $C(1)$ ).

Para grau 3 podemos escolher os seguintes polinômios para base:

$$f_0(u) = u^3, \quad f_1(u) = 3u^2(1-u), \quad f_2(u) = 3u(1-u)^2 \quad e \quad f_3(u) = (1-u)^3$$

Utilizando-se a equação 1 para esta base, tendo as coordenadas dos pontos no espaço  $P_0, P_1, P_2, P_3$  como coeficientes e variando o parâmetro  $u$  no intervalo  $[0,1]$  geramos pontos de uma curva polinomial de grau 3 que interpola os pontos extremos ( $P_0, P_3$ ) e passa "perto" dos pontos intermediários ( $P_1, P_2$ ) (vide Fig.II.3), tal qual as curvas de grau 2.



**FigII.3** *Curva de polinomial de grau 3.*  
 A tangente ao ponto  $P_0$  da curva tem a mesma direção do segmento que une  $P_0$  a  $P_1$ .  
 Igualmente a tangente a curva no ponto  $P_3$  tem a mesma direção do segmento que une  $P_3$  a  $P_2$ .

Acima foram abordados os casos particulares de grau 1,2,3 de uma família de polinômios (chamados polinômios de Bernstein). Para grau  $K$  os polinômios componentes da base Bernstein têm o seguinte formato geral:

$$B_{i,K}(u) = \binom{K}{i} u^i (1 - u)^{K-i}$$

onde  $B_{i,K}(\cdot)$  é o  $i$ -ésimo polinômio componente da base.

Podemos verificar geometricamente que as curvas geradas por tal base se encontram no interior do maior polígono convexo contendo os pontos no espaço usados para defini-las. Isso ocorre porque os polinômios da base, se forem avaliados para qualquer valor de  $u$  no intervalo  $[0,1]$  terão as seguintes propriedades:

$$B_{i,K}(u) \geq 0$$

$$\sum_{i=0}^K B_{i,K}(u) = 1$$

As curvas geradas a partir da base de Bernstein foram usadas pela primeira vez, em computação gráfica, em meados dos anos setenta por B ezier, na Renault em um sistema de CAD para projeto de autom oveis. Tais curvas s o conhecidas como curvas de B ezier–Bernstein.

Os pontos no espa o que servem para fixar, em linhas gerais, o formato da curva s o chamados de pontos de controle. Nas curvas de Bezier s o realizadas combina es lineares afins com os pontos de controle onde s o utilizados os valores das fun es de base como pondera o. Para cada valor de  $u$  ter-se-  uma pondera o diferente para os pontos de controle, logo, fixando-se um valor para  $u$  obteremos um ponto da curva:

$$C(u) = \sum_{i=0}^K P_i B_{i,K}(u)$$

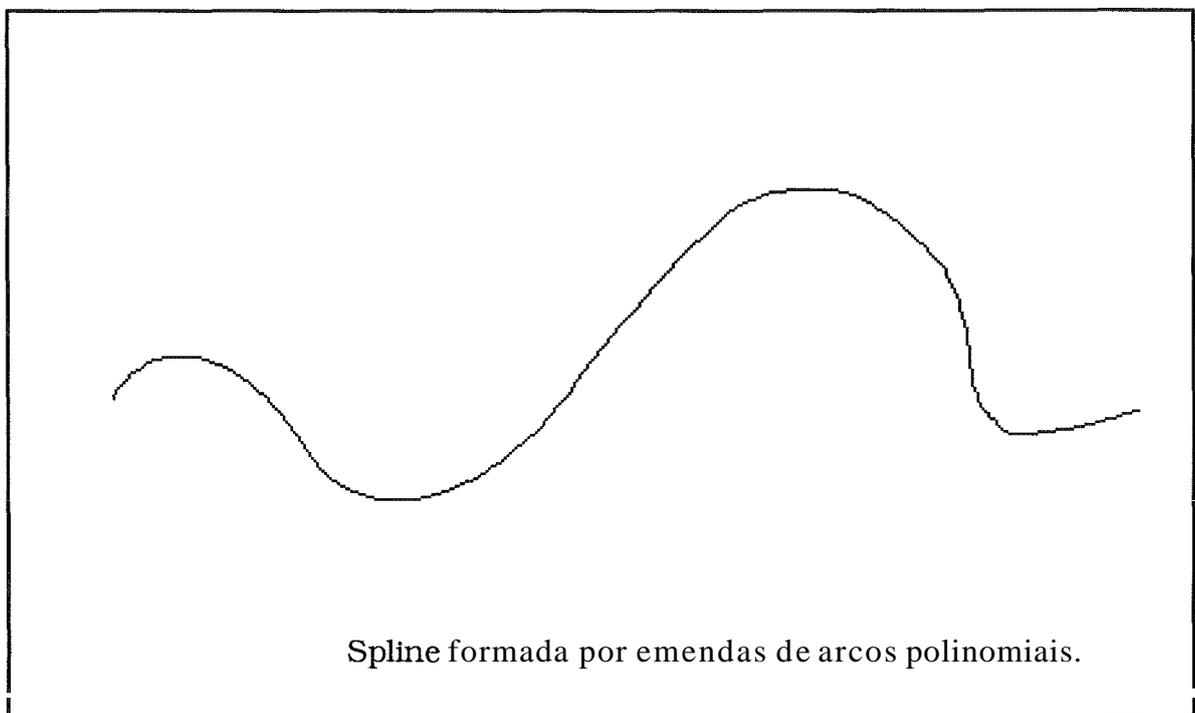
onde:  $P_i$    a representa o dos pontos de controle no espa o considerado e  $B_{i,K}$  s o as fun es de base que fornecem o peso de cada ponto. Como tais fun es somam 1 para qualquer  $u$  pertencente ao intervalo  $[0,1]$  tais combina es s o chamadas combina es baric tricas (vide FARIN[14]), j  que fornecem o centro de massa para a particular distribui o de pontos definida por  $P_i$ .

No caso polinomial, o n mero de pontos de controle determina o grau da curva. Neste caso aumentar n mero de pontos de controle significa elevar o grau da curva. Esta eleva o do grau da curva ocasiona um aumento dos custos computacionais para avali la al m de ocasionar problemas de instabilidade num rica.

Entretanto,  s vezes, com o intuito de se conseguir uma maior flexibilidade da curva utiliza-se a eleva o de grau. O processo de eleva o de grau nada mais   do que uma mudan a de base de representa o, onde descrevemos a particular curva de interesse num espa o de fun es polinomiais de grau mais alto. Na eleva o de grau,   calculada, a partir das bases envolvidas e dos pontos de controle da curva, sua representa o na nova base. M todos para se realizar esta tarefa podem ser encontrados em FARIN[14].

### II.3 – Curvas splines

Curvas splines são curvas formadas por emendas de arcos polinomiais com um grau de suavidade nas juntas livremente arbitrado. Por grau de suavidade devemos entender continuidade de derivada de alguma ordem. As splines são utilizadas em modelagem geométrica para modelar curvas e superfícies suaves( vide Fig.II.4). Neste caso, a flexibilidade de uma curva não depende do grau desta, mas do número de arcos polinomiais utilizados para gera-las. Desse modo pode-se obter curvas com grande flexibilidade com um custo computacional baixo.



**Fig.II.4** *Curva spline de grau 2.*

As funções splines de grau  $K$  geram um espaço vetorial, como nos mostra BARTELS[4]. Logo, fixando-se um grau  $K$ , é possível achar-se um conjunto de funções de base.

As splines de interesse neste trabalho são aquelas descritas por funções da base B-Spline. Para se definir uma base B-Spline é necessário que além do grau se arbitre um conjunto de valores ordenados, chamados nós, que determinam o intervalo de variação de cada segmento polinomial da função. No caso, tal conjunto deve conter um mínimo de  $2K+1$  nós para que se obtenha pelo menos um arco polinomial. Uma vez definido o grau e o conjunto de nós temos definida uma base B-Spline para funções spline.

O conjunto de nós pode ser arbitrariamente distribuído (vide Fig.II.5), sendo comum a distribuição uniforme dos nós. Se não existem nós coincidentes dizemos que os nós tem

multiplicidade 1. A continuidade da função nas juntas é dada por  $C^{k-r}$ , onde  $r$  é a multiplicidade dos nós, ou seja o número de nós múltiplos. A multiplicidade de um nó não pode ser maior que o grau da função, sob pena de gerar funções descontínuas.

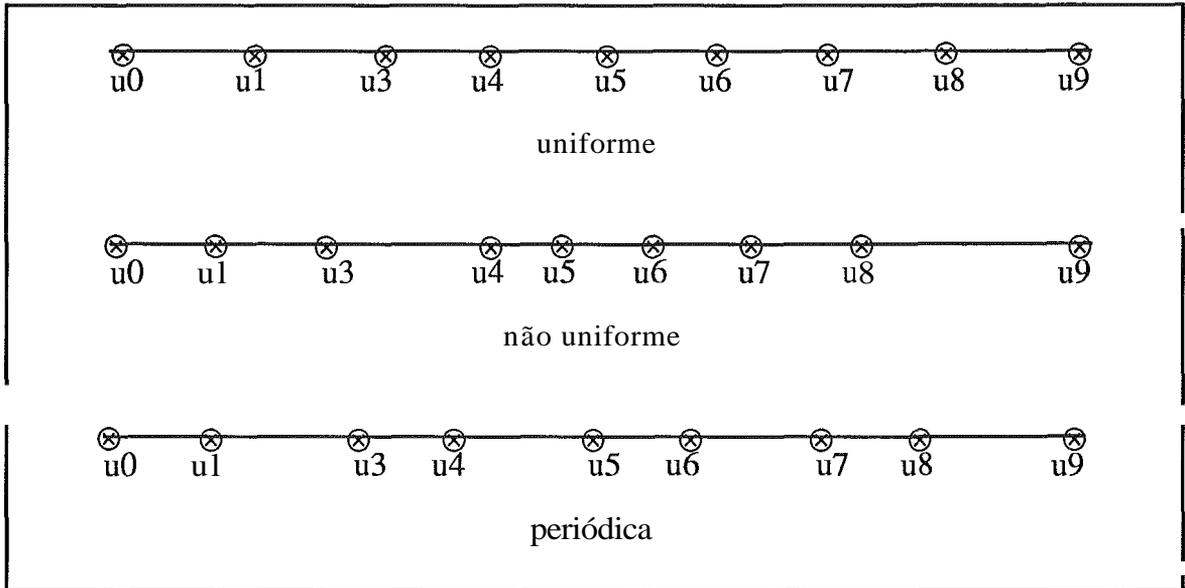


Fig.II.5 Distribuição de nós.

As funções de base B-Spline de grau  $K$ ,  $N_{i,K}(\cdot)$ ; tem uma forma bem definida, que pode se expressa pela seguinte fórmula de recorrência, definida por Cox/De Boor:

Para  $u \in [u_i, u_{i+1}]$ , num intervalo de nós que varia de  $u_K$  a  $u_n$ , tem-se:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

e para  $1 \leq j \leq K$

$$N_{i,j}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+j} - u_i} N_{i,j-1}(u) + \frac{u_{i+j+1} - u}{u_{i+j+1} - u_{i+1}} N_{i+1,j-1}(u)$$

As funções de base B-Spline têm ainda as seguintes propriedades:

$$N_{i,K}(u) \geq 0, \quad \text{para } u \in [u_0, u_n]$$

$$\sum_{i=0}^n N_{i,K}(u) = 1 \quad , \text{ para } u \in [u_0, u_{n-K}]$$

$N_{i,K}(u)$ : é continuamente diferenciável até ordem  $K-r$ , onde  $r$  é a multiplicidade dos nós.

Para gerar uma curva spline na base B-Spline, além do grau e da sequência de nós, devemos ter os coeficientes das funções de base. Estes coeficientes são dados pelas coordenadas dos pontos de espaço considerado, e vão definir, em última análise, o formato da curva. Estes pontos do espaço, tal qual nas curvas de Bézier são chamados de pontos de controle da curva.

As curvas geradas pela base B-Spline têm características interessantes para uso na modelagem interativa, tais como:

### *1- Controle Local*

Permitindo a alteração de apenas uma porção da curva, ou seja movimentando-se um ponto de controle apenas um conjunto restrito de arcos polinomiais é alterado, que são aqueles sob influência do ponto de controle movido.

### *2- Envoltória Convexa*

As curvas geradas por funções B-Spline encontram-se na envoltória convexa dos pontos de controle.

### *3- Invariância a Transformações Afins*

A aplicação de transformações geométricas a curvas pode ser efetuada aplicando-se a transformação desejada sobre seus pontos de controle.

### *4- Variação Decrescente*

O número de interseções de uma curva spline com qualquer reta é menor ou igual ao número de interseções desta reta com o polígono de controle.

## 5- Continuidade

As curvas geradas são polinomiais por partes, onde nas juntas existe continuidade de derivada de até ordem  $K-1$  (nós distintos), onde  $K$  é o grau da curva.

### II.3.1 – Método De Boor

Este método é bastante conhecido para avaliação de pontos sobre curvas geradas por funções de base B-Spline devido aos seus bons resultados em termos de desempenho computacional, tendo sido usado neste trabalho.

São apresentados aqui os resultados finais do método, sendo que sua demonstração é vastamente discutida em DE BOOR[28], que pode ser consultada para maiores detalhes.

Definamos:

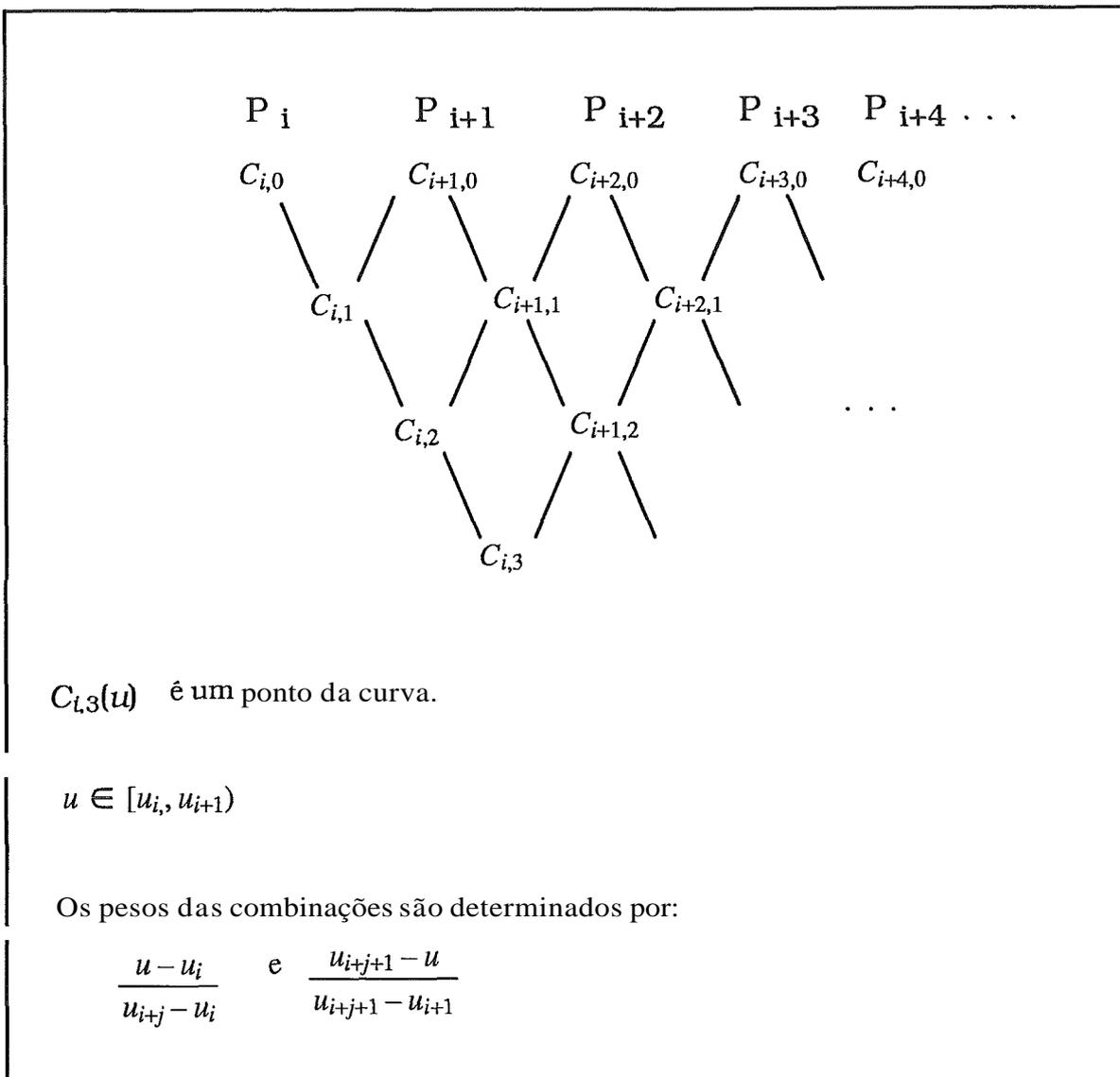
$$C_{i,0}(u) = P_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-K$$

e para  $K \geq j > 0$

$$C_{i,j}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+j} - u_i} C_{i,j-1}(u) + \frac{u_{i+j+1} - u}{u_{i+j+1} - u_{i+1}} C_{i+1,j-1}(u)$$

Então, para  $u \in [u_i, u_{i+1})$  o ponto  $C(u)$  de  $C(u) = \sum_{i=0}^K P_i N_{i,K}(u)$  é idêntico a  $C_{i,K}(u)$ .

O diagrama da Fig.II.6 ilustra, o cálculo de um ponto em uma curva spline de grau 3, gerada por funções de base B-Spline.



**Fig.II.6** Avaliação de um ponto em uma B-Spline de grau 3.

Note que apenas 4 pontos de controle colaboram para o cálculo de um ponto da curva.

### II.4 – Superfícies

As superfícies descritas na forma paramétrica abordadas aqui são representadas por um conjunto de pontos de controle ordenados segundo uma malha, e dois conjuntos de funções de base. A geração das superfícies se dá pelo produto tensorial das funções de base combinadas linearmente com coeficientes, que são as coordenadas dos pontos do espaço.

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m P_{ij} f_i(u) g_j(v)$$

onde:

$i, j$  são os índices das funções componentes consideradas

$S(.,.)$  fornece o valor da função, fixados os valores de  $u$  e  $v$ .

$n$  e  $m$  são o número de funções de base,

$f_i(.), g_j(.)$  são as funções de base.

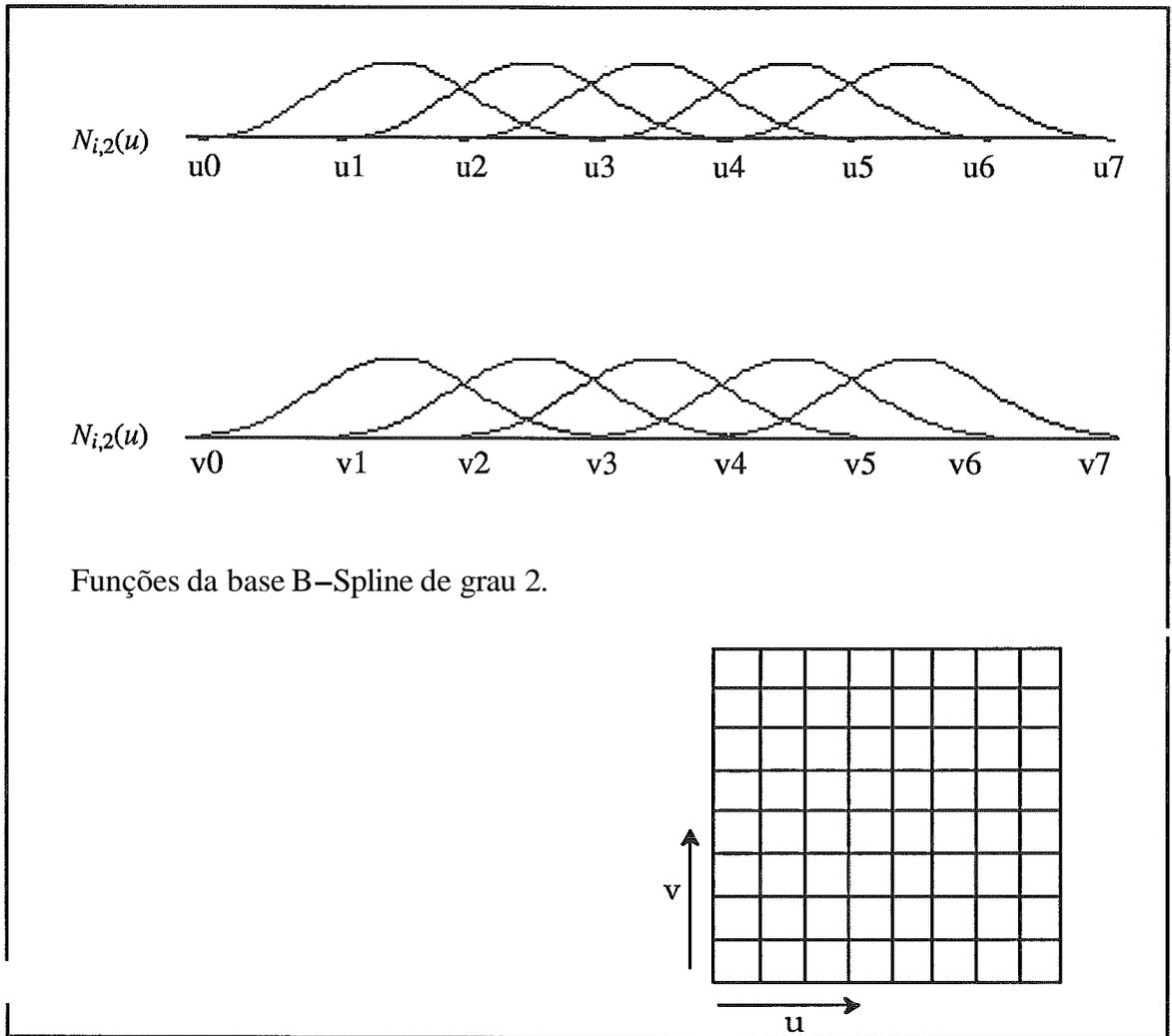
$P_{ij}$  são os pontos de controle associados a  $i$ -ésima função  $f(.)$  e a  $j$ -ésima função  $g(.)$ .

Neste trabalho, estamos interessados em superfícies geradas por funções de base B-Spline. Os coeficientes destas funções são as coordenadas dos pontos de controle ordenados segundo uma malha de controle, chamada poliedro de controle.

$$S(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m P_{ij} N_{i,K}(u) N_{j,K}(v)$$

onde:

$N_{j,K}(.)$  são funções de base B-Spline associadas a uma sequência de nós  $u_i$  's e  $v_i$  's como mostra a Fig.II.7 e  $P_{ij}$  é a representação dos pontos de controle da superfície.



Funções da base B–Spline de grau 2.

Fig.11.7 Nós em  $u$  e nós em  $v$ .

### II.5 - Considerações finais

A forma paramétrica é frequentemente utilizada quando se deseja avaliar um ponto sobre uma curva, bastando para isso fixar um valor para o parâmetro dentro do intervalo válido e substituí-lo nas equações que descrevem cada coordenada. A representação paramétrica proporciona ainda um modo adequado do ponto de vista computacional de implementar métodos de avaliação e visualização de superfícies. Contudo alertamos que em aplicações onde é necessário verificar se um dado ponto pertence a uma curva ou superfície, a forma paramétrica não é a mais adequada (vide FAUX[21]). Neste trabalho, entretanto como estamos interessados em métodos para a geração de superfícies, utilizamos a forma paramétrica de representação.

Além disso, neste trabalho usamos superfícies splines descritas pelo produto tensorial de funções da base B-Spline, por estas proporcionarem uma maior flexibilidade com um grau baixo mesmo para um conjunto grande de pontos. Permitem também um controle mais localizado da curva ou superfície, ou seja que sejam feitas modificações em apenas uma porção da curva ou superfície.

Neste capítulo vimos que para aumentar a flexibilidade de uma curva de Bézier devemos elevar o grau da mesma, nas curvas splines isso não precisa ser feito. No próximo capítulo discutiremos um procedimento para se aumentar a flexibilidade de uma spline descrita na base B-Spline baseado no acréscimo de novos nós ao espaço paramétrico.

## Capítulo III

### Refinamento de curvas e superfícies splines

Neste capítulo abordaremos alguns tópicos relativos a inserção de nós e refinamento (vide BARTELS[4]) de funções expressas na base B-Spline. Serão mostrados, alguns algoritmos utilizados em Modelagem Geométrica para realização destas tarefas. Dentre estes, veremos detalhes do algoritmo proposto por BOEHM[5] e do algoritmo de Oslo, proposto por COHEN e LINCH[27], que foram os pioneiros e em que se inspiram grande parte dos demais. A seguir, apresentaremos algumas referências para estudo de algoritmos mais recentes (GOLDMAN[11], SABLONIERE[31]) que têm a mesma finalidade. Concluiremos discutindo a importância da inserção de nós e refinamento no presente trabalho.

#### III.1 – Idéia geral

Uma base B-Spline fica bem definida por um conjunto de nós e pela fixação de um grau, como vimos no capítulo II. Uma função spline de grau  $K$  pode ser representada por um conjunto de  $m$  funções de base, sendo  $m \geq K + 1$ . Esta mesma função pode ser representada por um conjunto de  $m + n$  funções linearmente independentes, desde que este conjunto de funções consiga exprimir as funções de base anteriores. Ou seja, uma função spline pode ser expressa em diferentes bases.

Tomemos uma sequência de nós que descrevem um espaço de funções na base B-Spline de grau  $K$ . Se a esta sequência acrescentarmos mais nós (vide Fig III.1), o conjunto de funções gerado será maior e conterá as funções geradas antes da inclusão dos novos nós.

Ao processo de se descrever uma função expressa numa particular base para outra dá-se o nome de mudança de base; neste caso, partindo-se do conhecimento das duas bases e dos coeficientes que descrevem a função em uma das bases, é possível achar sua representação na outra.

Em particular, estamos interessados na mudança de base de uma função expressa em uma base B-Spline, associada a uma sequência de nós, para outra resultante da adição de novos nós a esta sequência; ou seja, estamos querendo saber qual será a representação de uma função na base resultante do acréscimo de um ou mais novos nós à sequência de nós original. Métodos que realizam tal tarefa são chamados de métodos de inserção de nós. Estes além de inserir os nós propriamente ditos, recalculamos coeficientes da representação da função nesta nova base de nós.

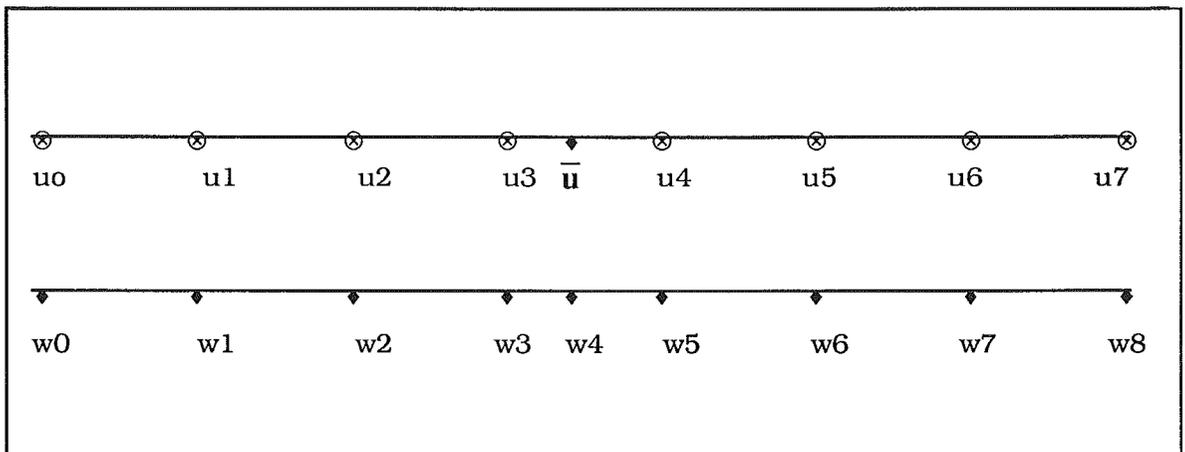


Fig.III.1 *Inclusão de um novo elemento à uma sequencia de nós já existente.*

A sequencia de  $w_i$ 's é a sequencia resultante da inserção do nó  $\bar{u}$  na sequencia de nós  $u_i$ 's.

O processo de inserção provoca uma elevação do número de nós no espaço paramétrico que servem para descrever a função (ou no caso de inserção de um nó já existente aumentar a multiplicidade do nó inserido). Com isso a movimentação de um ponto de controle afeta um conjunto menor de valores da função, pois reduz-se a influência de cada ponto de controle nas curvas spline. A este processo de descrever uma função por um conjunto maior de pontos de controle a fim de se obter um controle mais fino sobre esta dá-se o nome de refinamento (vide Fig III.2).

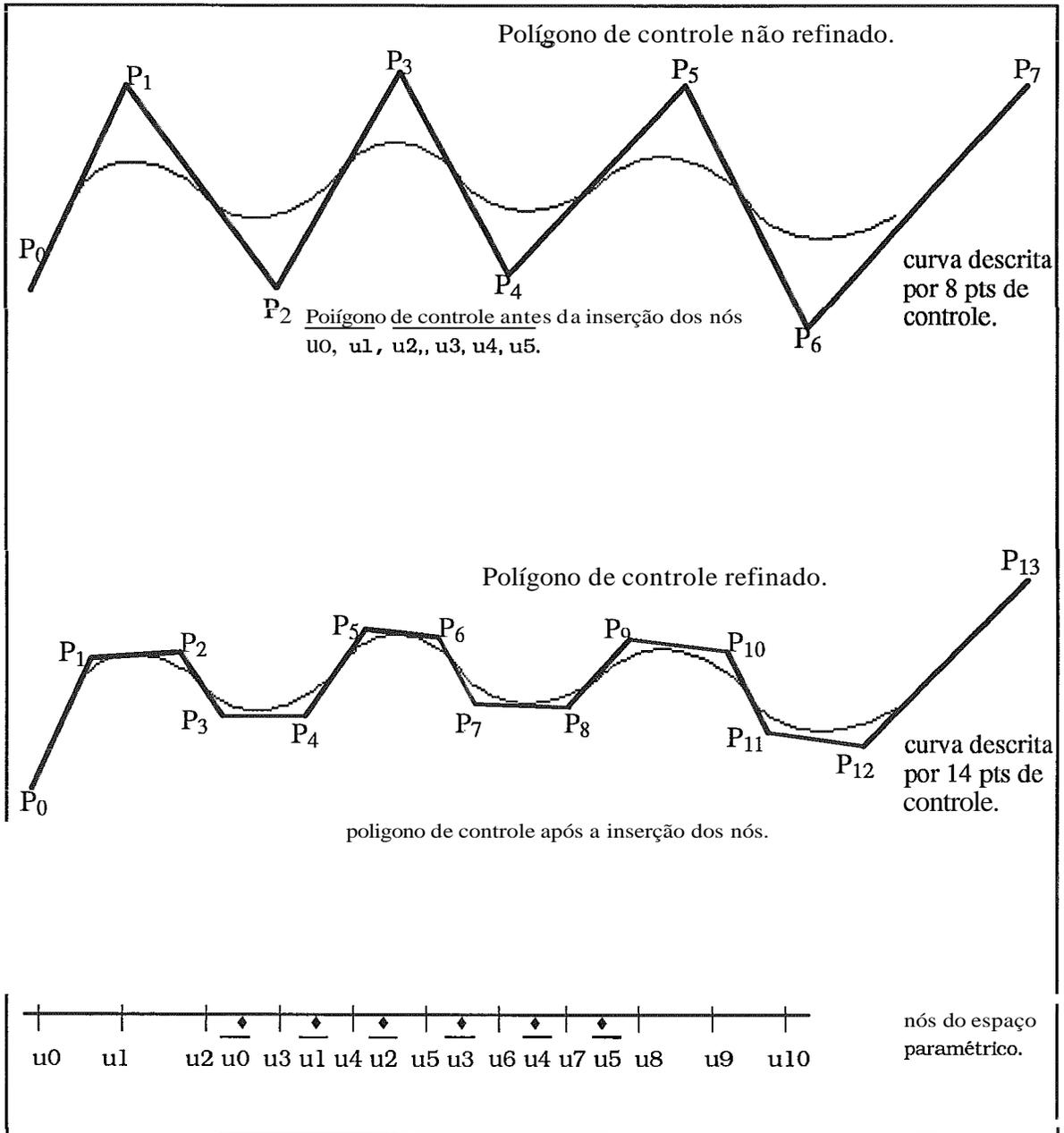


Fig.III.2 Descrição de uma mesma curva antes e depois de refinada.

A seguir, mostramos como se expressa matematicamente a inserção de nós BARTELS[4], FARIN[14] em B-Splines. Inicialmente tem-se que uma função de base pode ser escrita em termos de funções de base mais finas, porque tais funções conseguem expressar um espaço de funções que engloba a base anterior, logo:

$$B_i(u) = \sum_{j=0}^{n+m} \alpha_i(j) N_j(u)$$

onde:

- $m$  é o número de nós inseridos no espaço de parâmetros,  
 $\alpha_i(j)$  coeficientes da combinação linear,  
 $N_j(\cdot)$  são funções de base B-Spline mais finas.  
 $B_j(\cdot)$  são as funções de base antes da inserção dos  $m$  novos nós.

Os índices  $i$  e  $j$  referem-se, respectivamente, à função da base considerada antes da inserção e à função de base depois da inserção (de um ou mais nós).

Substituindo a função de base  $B_i(\cdot)$  na equação,  $C_i(u) = \sum_{i=0}^n V_i B_i(u)$ , que

descreve a função spline fica-se com a seguinte expressão:

$$C_i(u) = \sum_{i=0}^n V_i \sum_{j=0}^{n+m} \alpha_i(j) N_j(u)$$

Trocando-se então a ordem dos somatórios, temos a expressão:

$$C_i(u) = \sum_{j=0}^{n+m} \left( \sum_{i=0}^n V_i \alpha_i(j) \right) N_j(u)$$

Os pontos de controle refinados  $W_j$ , associados à nova sequência de nós podem ser escritos da seguinte maneira:

$$W_j = \sum_{i=0}^n V_i \alpha_i(j)$$

e a função pode ser reescrita em relação às funções de base e pontos de controle refinados:

$$C_i(u) = \sum_{j=0}^{n+m} W_j N_j(u)$$

Desenvolveram-se várias técnicas para se fazer a inserção dos nós e o cálculo no novo polígono de controle sendo que se destacam, por seu valor teórico e prático, o método de Boehm (onde os nós são inseridos um a um) e o método de Oslo (onde vários nós são inseridos de uma só vez). A seguir serão vistos detalhes destes algoritmos.

### III.2 – Boehm

O método de BOEHM[5] descreve cada função de base antes da inserção, como uma combinação linear de funções de base após o acréscimo de um nó; neste caso, a cada inserção de um nó,  $K + 1$  funções de base são afetadas ( considerando  $K$  o grau da curva ). Utilizando-se este algoritmo a cada inserção de um nó o polígono de controle deve ser reatualizado. Com isso, para inserirmos  $n$  nós, devemos aplicar o procedimento  $n$  vezes.

Boehm demonstrou a validade do método utilizando diferenças divididas; mais tarde BARRY/GOLDMAN[7] o fizeram utilizando apenas fórmulas de indução e recursão para B-Spline. Abaixo seguem os resultados finais encontrados por Boehm, que podem ser mais esmiuçados em BARTELS[4] e BOEHM[5].

$$\begin{aligned}
 B_i(u) &= N_i(u) & i \leq l - K - 1 \\
 B_i(u) &= \frac{u - w_i}{w_{i+K} - w_i} N_i(u) + \frac{w_{i+K+1} - u}{w_{i+K+1} - w_{i+1}} N_{i+1}(u) & l - K \leq i \leq l \\
 B_i(u) &= N_{i+1}(u) & i \geq l + 1
 \end{aligned}$$

onde:

$B_i(\cdot)$  são funções B-Spline associadas a um conjunto de nós  $u_i$  's. O índice  $i$  varia de 0 a  $n$  .

$N_i(\cdot)$  são funções B-Spline associadas a um conjunto de nós  $w_i$  's. Com um nó a mais, o índice  $i$  varia de 0 a  $n + 1$  .

$I$  é o índice do intervalo onde foi inserido o novo nó, ou seja  $w_l = u_l \leq w_{l+1} \leq u_{l+1} = w_{l+2}$  passou a existir um nó.

A partir desse resultado, após manipulações algébricas (mais detalhes vide BARTELS[4]), chega-se ao seguinte método, no qual os pontos de controle novos são calculados em função dos antigos:

$$\begin{aligned}
 W_i &= V_i & i \leq l - K \\
 W_i &= \frac{u - w_i}{w_{i+K} - w_i} V_i + \frac{w_{i+K+1} - u}{w_{i+K+1} - w_{i+1}} V_{i-1} & l - K \leq i \leq l \\
 W_i &= V_{i-1} & i \geq l + 1
 \end{aligned}$$

onde:

$V_i$  são os pontos de controle antes da inserção (antigos).

$W_i$  são os pontos de controle depois da inserção do novo nó (novos).

Por este algoritmo a cada nó inserido tem-se como recalculer o polígono de controle, que terá um ponto a mais que o original.

### III.3 – Oslo

A idéia do algoritmo de Oslo (vide COHEN[1], BARTELS[4]) baseia-se no seguinte: conhecidas duas sequências de nós (uma sequência de nós inicial e uma sequência resultante do acréscimo de novos nós à sequência inicial) o método acha o conjunto de coeficientes que descrevem as funções referentes à distribuição inicial de nós como uma combinação linear de funções de base mais finas, ou seja associadas a nova sequência de nós. Apresentamos, a seguir, este resultado, encontrado por COHEN/LINCHE[27]:

$$\alpha_{i,0}(j) = \begin{cases} 1 & u_i \leq w_j < u_{i+1} \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

para  $1 \leq r \leq K$ , sendo  $K$  o grau da spline.

$$\alpha_{i,r}(j) = \frac{w_{j+r} - u_i}{u_{i+r} - u_i} \alpha_{i,r-1}(j) + \frac{u_{i+r+1} - w_{j+r}}{u_{i+r+1} - u_{i+1}} \alpha_{i+1,r-1}(j)$$

onde os  $\alpha_i(j)$  são os coeficientes que descrevem as funções de base antigas em função das novas. Os nós  $u_i$  's se referem a sequência antes da inserção de novos nós e os  $w_j$  's se referem a nova sequência de nós gerada após a colocação dos novos elementos.

Uma vez calculados os coeficientes aplica-se o seguinte cálculo para achar os valores dos pontos de controle para o conjunto de nós estendido:

para  $j = 0, \dots, m + n$ , sendo inseridos  $m$  nós,

$$W_j = \sum_{i=0}^n V_i \alpha_{i,r}(j)$$

Se observarmos com atenção, veremos que, na primeira etapa (onde são calculados os coeficientes), o algoritmo se parece muito com o proposto por DE BOOR[28] para avaliação de pontos em curvas B–Spline. Na verdade os coeficientes calculados são os "pontos de controle" que descrevem as funções de base antigas como uma particular combinação linear das novas funções de base, ou seja, as funções de base antigas passam a ser meras funções splines, não sendo mais funções de base para a nova sequência de nós. BARTELS[4] mostra que os valores dos  $\alpha_{i,r}(j)$  são positivos, e o  $\sum_{i=0}^n \alpha_{i,r}(j) = 1$ , ou seja, os novos pontos de controle ( $W_j$ ) estão dentro da envoltória convexa dos pontos de controle antigos ( $V_i$ ). Além disso, temos que o polígono de controle se aproxima da curva a medida que são inseridos nós em um conjunto denso do domínio (vide FARIN[10]). Logo, ao inserirmos um número suficiente de nós, podemos dizer que a curva poderá ser aproximada pelo polígono de controle gerado. Desta maneira o algoritmo de Oslo serve também como um algoritmo para aproximar a curva por uma poligonal.

O algoritmo de Oslo fornece uma maneira de se achar os coeficientes  $a$ 's e a partir deles achar os novos pontos de controle da curva ( $W_j$ ). A seguir vamos mostrar alguns argumentos que já foram apresentados por BARTELS[4] e que procuram justificar os resultados finais do algoritmo de Oslo. Caso o leitor deseje maiores detalhes ou maior formalismo poderá buscá-los em BARTELS[4], FARIN[14] e COHEN[27].

### III.3.1 - Prova informal do algoritmo de Oslo

Para iniciar vamos considerar  $K$  o grau da spline. Aplicando-se uma fórmula de recorrência semelhante a de Boor, vista no capítulo II, para calcular o valor de uma função de base, temos:

$$B_{i,K}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+K} - u_i} B_{i,K-1}(u) + \frac{u_{i+K+1} - u}{u_{i+K+1} - u_{i+1}} B_{i+1,K-1}(u) \tag{1}$$

Para as funções B–Spline refinadas ( $N_j(\cdot)$ ), ou seja geradas por um conjunto mais fino de nós, referenciados por  $w_j$ , pode-se, já que também são funções B–Spline, aplicar também a fórmula de recorrência acima, resultando numa expressão análoga a (1):

$$N_{j,K}(u) = \frac{u - w_j}{w_{j+K} - w_j} N_{j,K-1}(u) + \frac{w_{j+K+1} - u}{w_{j+K+1} - w_{j+1}} N_{j+1,K-1}(u) \quad (2)$$

Se escrevermos as funções de base associadas ao conjunto de parâmetros originais ( antes de inserir os novos nós ) como uma combinação linear das funções de base associadas a nova sequência de parâmetros, gerada após a inclusão de  $m$  nós, obteremos a seguinte expressão:

$$B_{i,K}(u) = \sum_{j=0}^{n+m} \alpha_{i,K}(j) N_{j,K}(u)$$

se fizermos  $K = K - 1$ , podemos escrever  $B_{i,K-1}(\cdot)$  como:

$$B_{i,K-1}(u) = \sum_{j=0}^{n+m} \alpha_{i,K-1}(j) N_{j,K-1}(u)$$

Substituindo  $N_{j,K}(\cdot)$  pelo lado direito da expressão definida em (2) conseguimos:

$$B_{i,K}(u) = \sum_{j=0}^{n+m} \left[ \frac{u - w_j}{w_{j+K} - w_j} N_{j,K-1}(u) + \frac{w_{j+K} - u}{w_{j+K} - w_{j+1}} N_{j+1,K-1}(u) \right] \alpha_{i,K}(j)$$

Os elementos  $\alpha_{i,K}(-1)$  e  $\alpha_{i,K-1}(m+n+1)$  que não existem no somatório original serão definidos como zero:

$$\begin{cases} \alpha_{i,K}(-1) = 0 \\ \alpha_{i,K-1}(m+n+1) = 0 \end{cases}$$

Agora fazendo uma reordenação dos termos (reescrevendo o somatório em termos de  $N_{j,K-1}(\cdot)$ ), chegamos a expressão:

$$B_{i,K}(u) = \sum_{j=0}^{n+m+1} \left[ \frac{w_{j+K} - u}{w_{j+K} - w_j} \alpha_{i,K}(j-1) + \frac{u - w_j}{w_{j-K} - w_j} \alpha_{i,K-1}(j) \right] N_{j,K-1}(u) \quad (3)$$

Por outro lado, usando (1) e levando em conta que cada uma das funções  $B_{i,K-1}(u)$  e  $B_{i+1,K-1}(u)$  pode ser escrita em termos de  $N_{j,K-1}(\cdot)$ , temos:

$$B_{i,K}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+K} - u_i} \sum_{j=0}^{n+m+1} \alpha_{i,K-1}(j) N_{j,K-1}(u) + \frac{u_{i+K} - u}{u_{i+K+1} - u_{i+1}} \sum_{j=0}^{n+m+1} \alpha_{i+1,K-1}(j) N_{j,K-1}(u) \quad (4)$$

Como  $\alpha_{i,K-1}(m+n+1)$  e  $\alpha_{i+1,K-1}(m+n+1)$  não pertencem ao somatório serão definidos como zero:

$$\begin{cases} \alpha_{i,K-1}(m+n+1) = 0 \\ \alpha_{i+1,K-1}(m+n+1) = 0 \end{cases}$$

A expressão (4) pode ser reorganizada, colocando-se  $N_{j,K-1}(\cdot)$  em evidência:

$$B_{i,K}(u) = \sum_{j=0}^{n+m+1} \left[ \frac{u - u_i}{u_{i+K} - u_i} \alpha_{i,K-1}(j) + \frac{u_{i+K+1} - u}{u_{i+K+1} - u_{i+1}} \alpha_{i+1,K-1}(j) \right] N_{j,K-1}(u) \quad (5)$$

E se as expressões (5) e (3) representam a mesmo valor então sua diferença é igual a zero. Pode-se dessa forma escrever:

$$\sum_{j=0}^{n+m+1} \left[ \frac{u - u_i}{u_{i+K} - u_i} \alpha_{i,K-1}(j) + \frac{u_{i+K+1} - u}{u_{i+K+1} - u_{i+1}} \alpha_{i+1,K-1}(j) - \frac{w_{j+k} - u}{w_{j+k+1} - w_j} \alpha_{i,K}(j-1) - \frac{u - w_j}{w_{j+k} - w_j} \alpha_{i,K}(j) \right] N_{j,K-1}(u) = 0 \quad (6)$$

Isto deve ser válido para todos os valores de  $u$ . Já que as funções  $N_{j,K-1}(\cdot)$  formam uma base, então para que a assertiva anterior se verifique, os coeficientes das funções de base devem ser nulos. Consequentemente tem-se:

$$\frac{u - u_i}{u_{i+K} - u_i} \alpha_{i,K-1}(j) + \frac{u_{i+K+1} - u}{u_{i+K+1} - u_{i+1}} \alpha_{i+1,K-1}(j) - \frac{w_{j+k} - u}{w_{j+k+1} - w_j} \alpha_{i,K}(j-1) - \frac{u - w_j}{w_{j+k} - w_j} \alpha_{i,K}(j) = 0 \quad (7)$$

Considerando-se o caso mais simples da não existencia de nós múltiplos, a fim de simplificarmos os cálculos, vamos assumir que os nós refinados  $u$ 's são distintos.

A expressão (7) deve ser nula para todos os valores de  $u$ , então para o particular valor de  $u = w_{j+K}$  tem-se:

$$\frac{w_{j+K} - u_i}{u_{i+K} - u_i} \alpha_{i,K-1}(j) + \frac{u_{i+K+1} - w_{j+K}}{u_{i+K+1} - u_{i+1}} \alpha_{i+1,K-1}(j) - \frac{w_{j+K} - w_{j+K}}{w_{j+K+1} - w_j} \alpha_{i,K}(j-1) - \frac{w_{j+K} - w_j}{w_{j+K} - w_j} \alpha_{i,K}(j) = 0 \quad (8)$$

que por simplificação dos termos nos fornecerá uma fórmula de recorrência para cálculo dos coeficientes  $\alpha_i$ 's:

$$\alpha_{i,K} = \frac{w_{j+K} - u_i}{u_{i+K} - u_i} \alpha_{i,K-1}(j) + \frac{u_{i+K+1} - w_{j+K}}{u_{i+K+1} - u_{i+1}} \alpha_{i+1,K-1}(j) \quad (9)$$

que é o algoritmo de Oslo.

### III.4 – Outras técnicas para inserção de nós

A inserção de nós é uma das mais poderosas e usadas ferramentas para avaliar curvas geradas por funções B–Splines. Como aplicação podemos citar a subdivisão de superfícies que é importante não só na geração de uma curva ou superfície mas também em algoritmos de interseção e "rendering".

Outros métodos para inserção de nós são estudados em Modelagem Geométrica com intuito de estudar (tentando abordagens distintas) e de se melhorar sua eficiência em termos computacionais.

Dentre as técnicas existentes tem–se a inserção de nós fatorados, de BARRY/GOLDMAN[11] onde os autores apresentam um algoritmo que se propõe a reduzir o número de cálculos e em alguns casos ser mais eficiente que o algoritmo de Boehm e de Oslo. Este algoritmo se propõe ainda a unificar alguns conceitos a respeito da teoria de splines.

A inserção de nós é uma técnica de mudança de base, pois dada uma curva em uma representação, aplicando–se um algoritmo de inserção, consegue–se expressar a mesma curva em uma outra base. É esta a idéia do algoritmo de SABLONNIERE[31] que em sua forma original transforma um segmento da curva B–Spline na sua forma de Bézier (Em sua forma modificada tranforma um segmento B–Spline para outro segmento B–Spline).

Além desses algoritmos de inserção existem, ainda, modificações no algoritmo de Oslo e no algoritmo de Sablonniere (recursividade) propostas por GOLDMAN[12] visando diminuir o número de combinações afins e melhorar seu desempenho. Outra técnica é o algoritmo de Oslo II, que é uma versão do algoritmo de Oslo, em que se trabalha diretamente com os pontos de controle GOLDMAN[12] e GOLDMAN[33].

É interessante dizer que a maioria dos algoritmos para fazer a inserção de nós apresenta–se vantajoso para um conjunto restrito de casos, não sendo prudente dizer que este

ou aquele algoritmo é o mais eficiente. Isso ocorre porque existem muitos fatores que influenciam nessa medida, tais como número de nós a serem inseridos, se os nós terão ou não multiplicidade maior que um, em que região do espaço paramétrico serão inseridos e ainda em que equipamento será implementado.

### III.5 – Utilidade do algoritmo de Oslo neste trabalho

Ao realizarmos operações lineares sobre funções spline, se tais funções estiverem descritas na mesma base B-Spline, isto é, se estiverem em um mesmo espaço vetorial, garante-se que as funções resultantes da aplicação das operações também estarão. As operações lineares proporcionam ainda a vantagem de dada uma função spline, podermos aplicar as operações diretamente sobre os coeficientes que a descrevem.

Entretanto se estivermos operando com funções descritas por diferentes conjuntos de funções de base, isto quer dizer que as funções pertencem a espaços vetoriais distintos e nada se pode afirmar a respeito de uma operação deste tipo. Neste caso é necessário realizar uma mudança de base onde se objetiva passar as funções a serem operadas para um espaço vetorial comum.

É bom ressaltar que o espaço vetorial comum, no qual estamos interessados, deve ser também um espaço gerado por funções de base B-Spline para que tenhamos preservadas uma série de propriedades que nos são úteis, propriedades estas já descritas no capítulo II.

Neste trabalho necessitaremos operar funções contidas no mesmo espaço, em outras palavras, descritas pela mesma base. Caso isso não ocorra, uma maneira simples de se achar uma base B-Spline comum é adicionarmos novos nós a cada uma das sequências de nós que serviam para descrever as funções, de modo a que ambas acabem contidas em uma mesma sequência de nós (vide Fig III.3). Optaremos pelo algoritmo de Oslo para fazer a inserção dos nós, ou seja para fazermos a mudança de base. Como conhecemos, a priori, as sequências de nós antes e depois da adição dos novos nós este algoritmo torna-se bastante atraente.

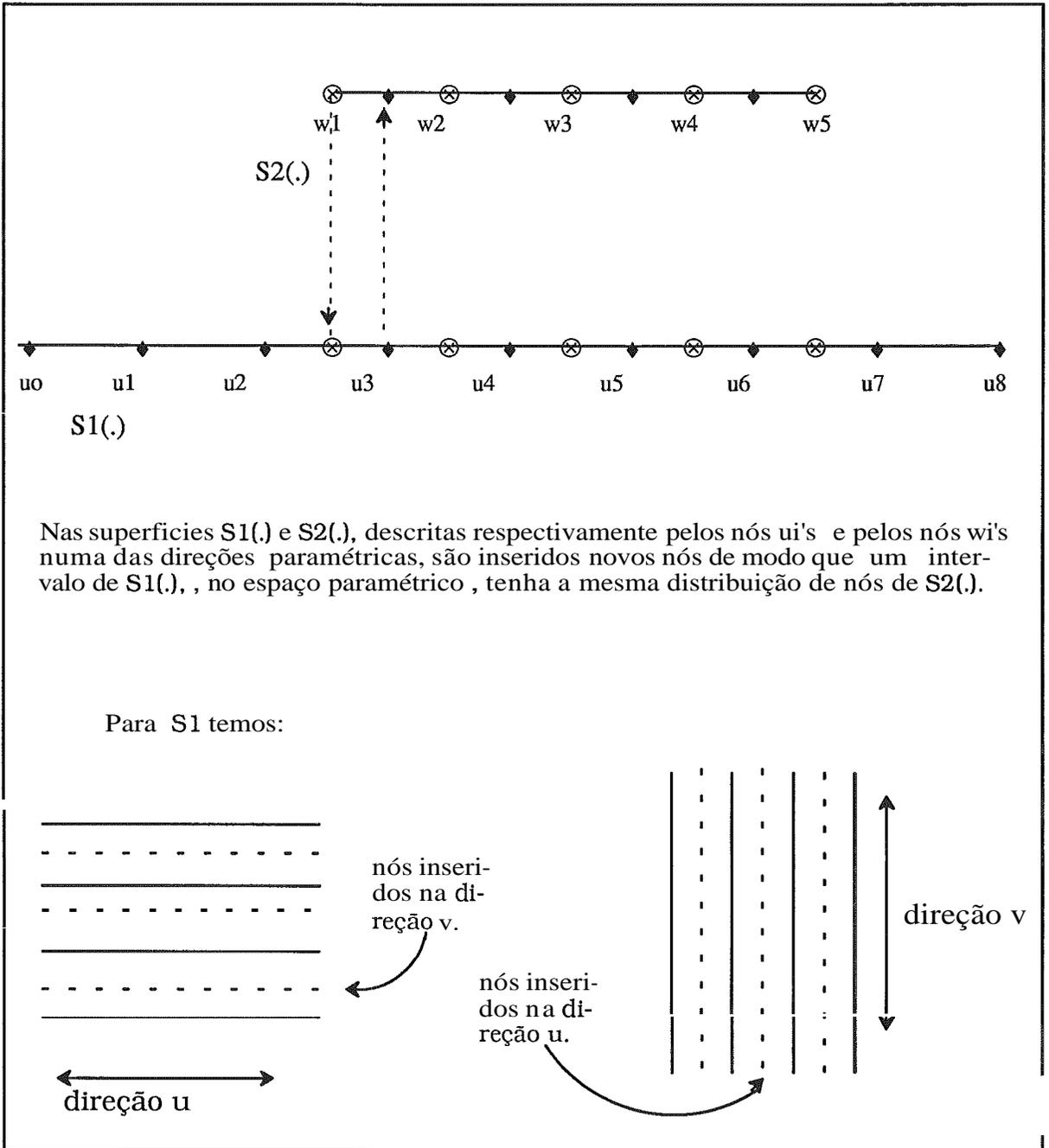
#### III.5.1 – Inserção de nós em superfícies

Neste trabalho, vamos optar pela abordagem descrita aqui do algoritmo de Oslo, onde são calculados inicialmente os coeficientes de Oslo vistos como  $\alpha_{i,K(j)}$  's. No algoritmo de

Oslo II os novos pontos de controle são calculados sem que seja necessário calcular explicitamente os coeficientes. Entretanto, se usássemos Oslo II para superfícies, teríamos que aplicar a fórmula de recorrência que calcula os novos pontos de controle para todas as linhas paramétricas na direção considerada, isso seria então mais custoso do que aplicar a fórmula de recorrência, descrita na seção II.3.1, para achar todos os  $\alpha_{i,K(j)}$ 's e depois por cálculo de somatórios calcular os novos pontos de controle resultantes da inserção de nós em uma das direções paramétricas (vide Fig 111.3).

Devemos observar que a aplicação do algoritmo de Oslo para cada uma das direções paramétricas se faz independentemente (vide Fig III.3).

O algoritmo de Oslo lembra a formulação de Boehm para o cálculo das novas funções de base em função das antigas enquanto que o algoritmo de Oslo II possui aspectos semelhantes a formulação de Boehm para achar o novo polígono sem que haja necessidade de calcular explicitamente o valor das funções de base.



FigIII.3 A inserção de nós é feita independentemente para cada uma das direções isoparamétricas.

III.6 – Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas algumas noções a respeito de inserção de nós e refinamento, bem como alguns métodos para faze-10s. Podemos concluir que a propriedade

das B-Splines de serem descritas por um conjunto maior de pontos de controle é uma vantagem que permite que se alterem porções menores de um dado objeto. Estes métodos servem então para aumentar a flexibilidade das superfícies splines descritas na base B-Spline (vide BRUNET[9]).

Sumarizando, podemos dizer ainda que utilizamos o algoritmo de Oslo como forma de fazer mudança de base com o objetivo de tornar factível a realização de operações sobre superfícies descritas originalmente em espaços diferentes.

No próximo capítulo veremos algumas aplicações em que são utilizados os métodos discutidos neste capítulo.

## Capítulo IV

### Aplicações de refinamento de superfícies

O uso de superfícies splines geradas por funções B-Spline satisfaz grande parte das aplicações pela flexibilidade que proporcionam para a edição e modificação de porções localizadas da superfície ( controle local – Capítulo II, seção 3). Entretanto criar pequenas alterações na superfície que necessitem de um controle mais local do que o naturalmente proporcionado pelo uso de funções B-Spline não é tão simples; em Modelagem Geométrica permitir detalhes mais finos sobre uma superfície é objeto de estudos há algum tempo.

#### IV.1 – Principais abordagens

Dentro do estudo de maneiras para se modelar superfícies, algumas formas de desenvolvimento do tema e mais especialmente da aplicação da idéia de refinamento de superfícies, são de interesse para este trabalho. A seguir, descreveremos, resumidamente, alguns destes trabalhos.

O artigo de FORSEY/BARTELS[8] deriva-se da experiência obtida durante a construção de um protótipo de editor superfícies B-Spline onde era necessário misturar o controle das manipulações em regiões grandes da superfície com manipulações de natureza mais fina. FORSEY discute um sistema de modelagem interativa onde a partir de uma superfície base, consegue-se, definindo níveis de refinamento, editar pequenas porções sobre esta superfície.

SEDERBERG[15] e BARR[2] apresentam uma maneira promissora de alterar sólidos e superfícies através de deformações descritas por produto tensorial de polinômios de Bézier tri-variáveis. Tais deformações podem produzir efeitos interessantes a nível global e também a nível local, conseguindo-se modificar pequenas porções sobre os objetos. Entretanto suas estratégias não serão abordadas neste trabalho. Os que desejarem maiores detalhes poderão encontrá-los nos artigos já citados.

Outro problema abordado é o de ajuste de uma superfície a um conjunto de dados conhecidos. Este problema é bastante explorado por ROGERS[22] e ROGERS[29] que utiliza superfícies splines e para minimizar o erro entre a superfície resultante (aproximada) e a superfície real utiliza o método dos mínimos quadrados (vide ROGERS[30]). O problema de ajuste de pontos provenientes de uma superfície real é novamente abordado por SCHIMMITT[13]; neste caso a superfície é gerada por aproximações sucessivas, onde a cada passo o algoritmo procura maior refinamento apenas nas áreas cuja aproximação deixou a desejar, segundo um critério de qualidade da superfície final arbitrado a priori.

Nos artigos SCHIMMITT[13] e FORSEY/BARTELS[8] é discutido o conceito de sobreposição de retalhos, onde o nível de detalhamento depende do nível de refinamento desejado. Nesses casos a superfície gerada fica totalmente presa a estrutura de dados definida, e sem dúvida isto é o ponto forte de [13]. No artigo [8] também é discutida a utilização do algoritmo de Oslo como forma de inserir novos nós na superfície durante o processo de refinamento.

Temos ainda o caso em que, dadas duas superfícies splines, deseja-se fazer uma combinação destas superfícies de modo a gerar apenas uma. Essa combinação, entretanto deve preservar as características gerais das superfícies envolvidas, ou melhor, seria uma colagem onde o resultado deve ser o mais próximo possível do esperado. O artigo de FORSEY/BARTELS[8] cita esta possibilidade sem especificar maiores detalhes.

O controle local permite que se tenha a possibilidade de alterações do detalhe, e somente nele, em tempo de edição da superfície resultante, enquanto que o controle global permite que a superfície, a qualquer momento, sofra modificações mais gerais (vide Fig.IV.1). É interessante observar que, tanto no caso de combinação de duas superfícies já existentes como no caso da edição de uma superfície mais detalhada a partir de uma superfície base [8], é importante possuir um controle a nível local, restrita a uma pequena área da superfície, e um controle a nível global que possibilite mudanças maiores na superfície base.

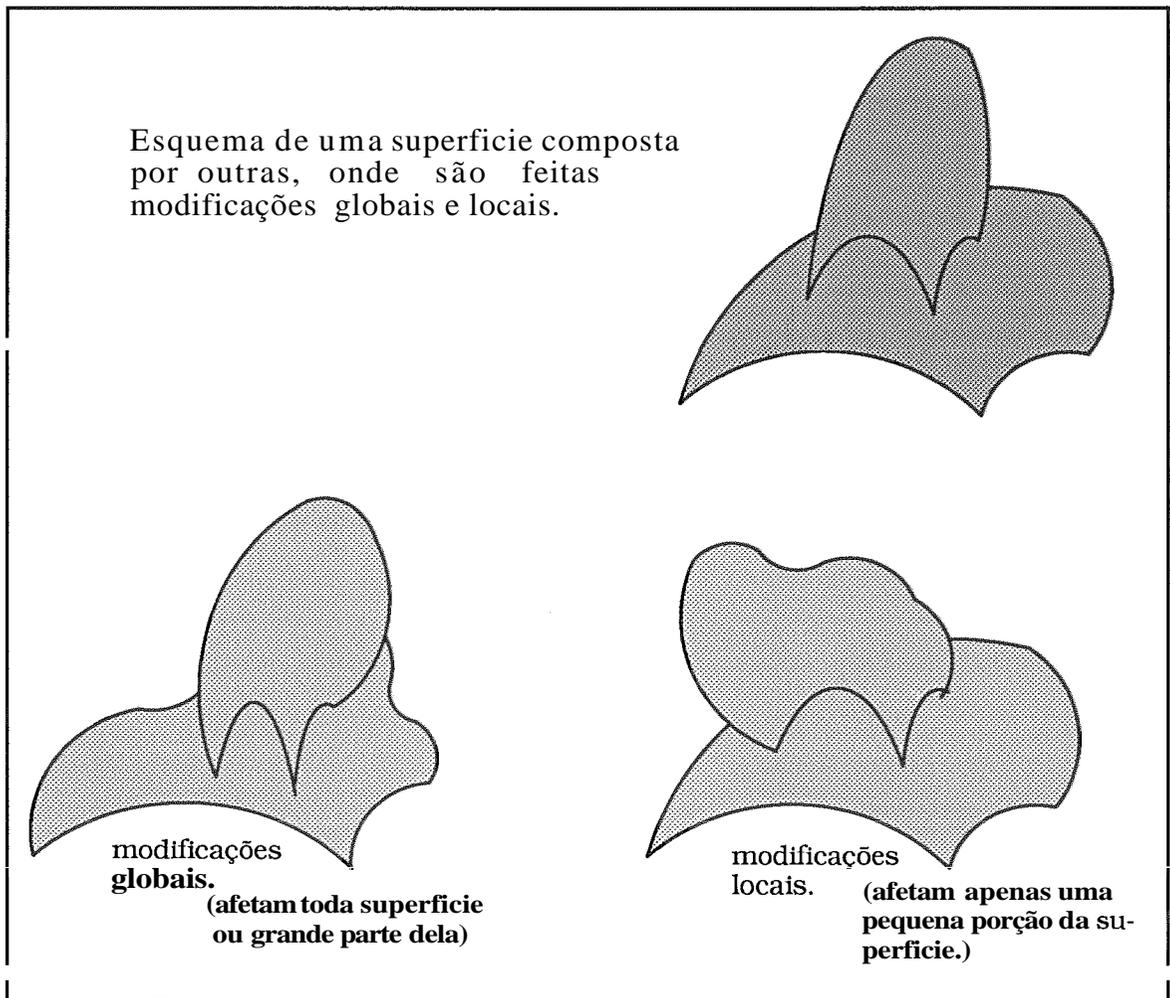


Fig.IV.1 Níveis diferentes de alteração de uma superfície.

## IV.2 - Descrição do problema abordado

Dadas duas superfícies splines, geradas por funções B-Splines, deseja-se colocar uma sobre a outra, numa área especificada, gerando uma única superfície. É desejável também que a superfície resultante mantenha-se suave, ou seja com continuidade de derivadas nas juntas de ordem  $K-1$ , sendo  $K$  o grau da superfície. As superfícies envolvidas devem possuir o mesmo grau. Será referenciado, neste texto, como colagem o processo de compor as duas superfícies gerando uma única.

As superfícies envolvidas são definidas por um valor que designa seu grau, por um poliedro de controle e por dois conjuntos de nós, livremente espaçados, correspondentes as direções  $u$  e  $v$  do espaço paramétrico.

Além das informações para descrição da superfície, deve ser informada para cada superfície a área desta que deve ser preservada, quando houver o acoplamento de duas superfícies.

É importante ressaltar que para um conjunto de  $m \times n$  pontos de controle para uma superfície de grau  $K$  precisa-se de  $m+K+1$  nós na direção  $u$  e  $n+K+1$  nós na direção  $v$ , para que a superfície tenha valores válidos de  $u$  e  $v$  associados ao intervalo  $[u_K, u_m] \times [v_K, v_n]$ .

Esta idéia pode ser estendida para mais superfícies, ou seja podemos ter uma superfície, sobre a qual foram anexadas  $l$  superfícies, que por sua vez são descritas por outras tantas superfícies.

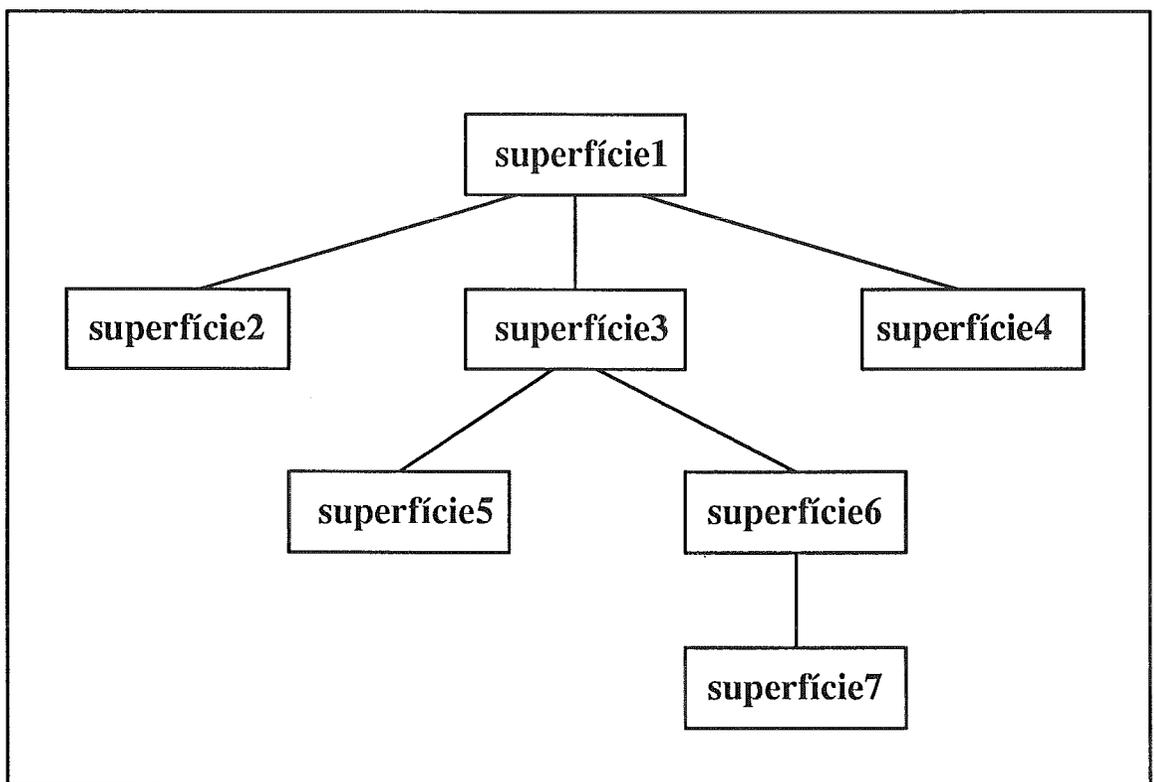


Fig.IV.2 Esquema de uma superfície composta pelo acréscimo de outras.

No esquema acima (Fig.IV.2), a superfície 1 é formada por sua definição padrão (conjunto de nós, poliedro de controle, grau) mais a colagem das superfícies 2,3 e 4. A superfície 3 é composta de sua definição padrão mais a colagem das superfícies 5 e 6. A superfície 6 por sua vez é formada por sua definição padrão agregada à superfície 7.

### IV.3 – Aplicações

A técnica de colagem de duas superfícies splines é útil na modelagem incremental de um objeto, onde o resultado final é gerado pela junção de duas ou mais superfícies. Por exemplo, embora os métodos de elaboração da superfície e decolagem nas juntas devessem ser mais acurados para a aplicação, poder-se-ia pensar num sistema de modelagem de aviões, onde as asas do aparelho fossem modeladas por um modelador e o corpo do avião por outro; ao final se deveria juntar as duas partes gerando-se apenas uma.

Outra aplicação, como citada em FORSEY e BARTELS[8], seria fazer um editor de superfícies interativo onde estas poderiam ser formadas por partes, trabalhadas em separado e depois anexadas através dessa técnica, dando origem a uma única superfície.

### IV.4 – Conclusão

Neste capítulo foi dado um apanhado, a respeito de alguns dos artigos existentes sobre refinamento (com a criação de detalhes mais finos) e também sobre a modelagem de superfícies, a partir, de um conjunto de dados amostrais, em que existe interesse em se preservar uma série de características da superfície a ser aproximada. Depois vimos ainda a situação, mais restrita ao nosso objeto de estudos onde desejava-se juntar duas superfícies mantendo a superfície resultante suave.

No próximo capítulo, para iniciar, serão fornecidos maiores detalhes sobre o problema abordado, restrições, figura etc. A seguir veremos como compor duas superfícies existentes, de modo que a superfície resultante seja visualmente agradável.

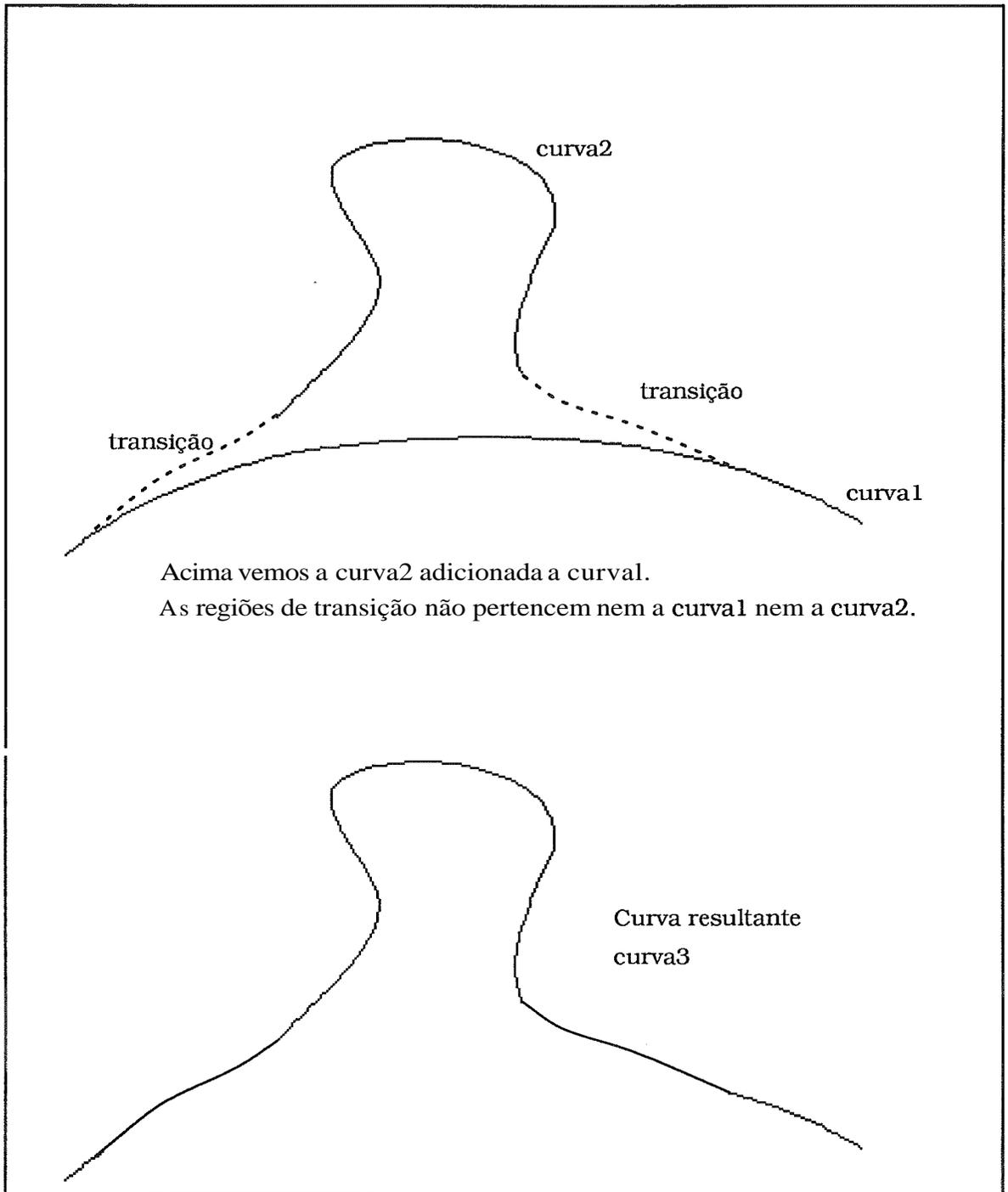
# Capítulo V

## Colagem de superfícies

Neste capítulo abordaremos a colagem de duas superfícies Splines. Inicialmente discutiremos a colagem de superfícies descritas sob a mesma base de representação, ou seja, aquelas que são descritas com as mesmas funções de base. Neste tópico merecem destaque os métodos de adoçamento aplicados às regiões passíveis de suavização. A seguir veremos como proceder caso as superfícies envolvidas não estejam descritas na mesma base. Nesta etapa, voltaremos a discutir o algoritmo de Oslo (vide COHEN/LINCHE[27]). Logo após, será definido o que é, para que serve e como aplicar a localização das superfícies. Por fim serão feitas considerações à respeito do que foi abordado.

### V.1– Idéia geral

Por colagem de superfícies deve-se entender a geração de uma nova superfície feita à partir de duas, onde esta vai se constituir da primeira adicionada da segunda, mantendo-se a suavidade das juntas de transição da nova superfície. Neste contexto transição suave deve ser compreendida como a existência de algum grau de continuidade de derivada na superfície resultante e além disso, o efeito deve ser visualmente próximo do intuitivamente esperado. Abaixo mostramos na Fig.V.1 um exemplo geométrico da colagem de curvas, que poderia também ser encarada como uma seção transversal de uma superfície.



*Fig.V.1 Composição da curva3 a partir de duas curvas componentes.*

Para começarmos a explicar como se realiza a colagem de superfícies vamos admitir, pelo menos no momento, as seguintes hipóteses:

hipótesel

*Sejam duas superfícies  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente, tal que existe alguma região no espaço paramétrico de  $S_1$  que possui a mesma distribuição de nós da superfície  $S_2$ . Ou seja, existe uma região em  $S_1$  descrita pela mesma base de nós de  $S_2$ .*

hipótese1.1

*A área da superfície  $S_1$  onde adicionaremos a superfície  $S_2$  é uma área que obedece a hipótesel.*

Tais hipóteses são ilustradas na Fig.V.2 :

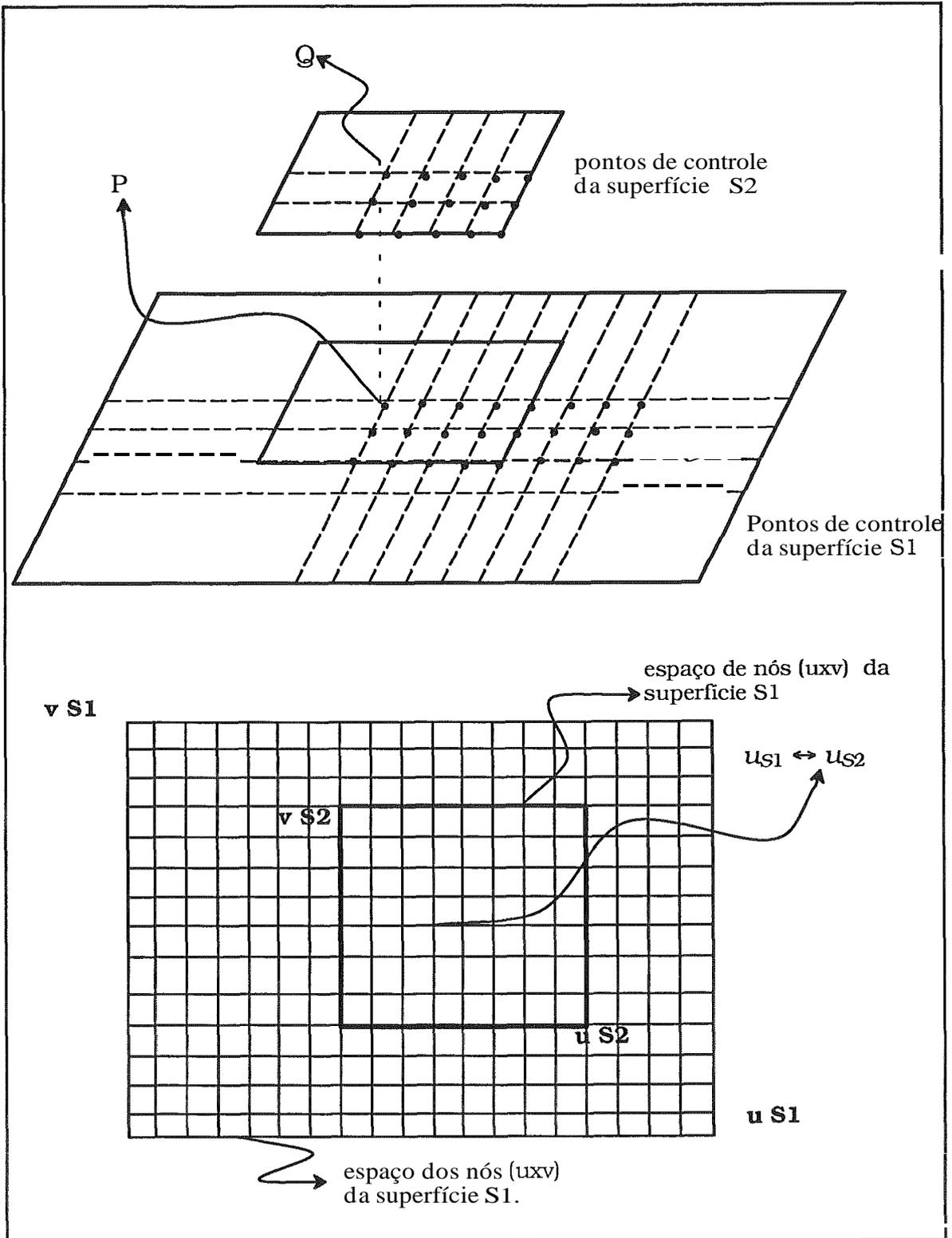
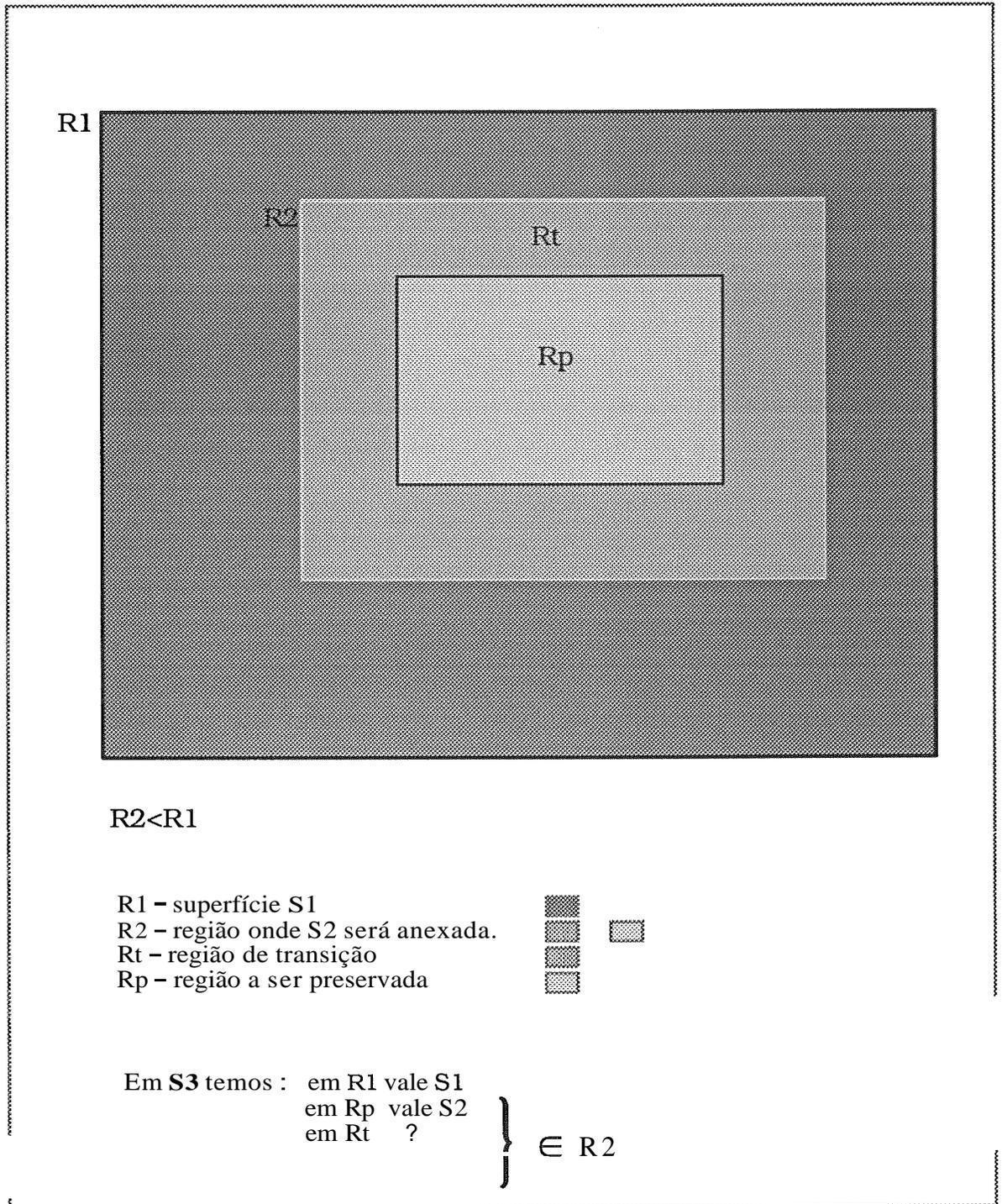


Fig.V.2 *Esquema de duas superfícies, onde temos que S2 está descrita por um intervalo da base de nós que descreve S1.*

Vamos agora, partindo das hipóteses 1 e 1.1, definir a adição de uma superfície  $S_2$  a outra superfície  $S_1$  como a operação onde a superfície resultante  $S_3$ , descrita na mesma base de nós de  $S_1$ , tem seus pontos de controle calculados da seguinte maneira: para os nós do espaço paramétrico que tem pontos de controle associados a  $S_1$  e  $S_2$  passam a ser associados os pontos de controle de  $S_2$ . Para os nós em que só existem pontos de controle associados a  $S_1$  passam a valer estes como pontos de controle de  $S_3$ . O poliedro de controle de  $S_3$  é então composto por uma área onde os pontos de controle são iguais aqueles que descrevem  $S_2$  e uma outra onde são válidos os pontos de controle de  $S_1$ .

A superfície  $S_3$  resultante deste novo poliedro de controle terá uma região onde é exatamente igual a superfície  $S_2$ , uma região onde é exatamente igual a superfície  $S_1$  e ainda uma região de transição onde os pontos da superfície resultante  $S_3$  não estão contidos nem em  $S_1$  nem  $S_2$ . Dependendo das superfícies  $S_1$  e  $S_2$  tal transição pode ser demasiadamente brusca, embora suave do ponto de vista matemático.

Em muitos casos, poder-se-ia visar a preservação de apenas uma parte da superfície  $S_2$ , neste caso, tal região ficaria definida delimitando-se no espaço paramétrico a área da superfície  $S_2$  a ser preservada (vide Fig.V.3).



FigV.3 Esquema planar das regiões de S1 e de S2 que compõem S3.

Uma vez que S2 não necessita ser totalmente preservada passamos a dispor de uma área no espaço paramétrico de S3 que pode ser considerada de transição, dispomos então de uma região adicional na qual podemos aproveitar para preparar uma suavização menos brusca das áreas de borda, em outras palavras passamos a ter uma região onde os pontos de controle da superfície S3 podem ser arbitrados segundo algum método. Os possíveis métodos para a

escolha dos pontos de controle nestas regiões serão denominados métodos de adoçamento pois estes objetivam criar regiões de juntas menos bruscas e com uma maior suavidade do ponto de vista intuitivo.

É interessante mencionar que agora a superfície **S3** só fica bem definida após a fixação do método de adoçamento, pois para cada método aplicado resultará de uma superfície diferente, com um maior ou menor grau de suavidade nas regiões de transição. Assim a operação de adição só ficará bem definida se tivermos fixado o método de adoçamento.

A seguir veremos alguns métodos experimentados para gerar a superfície. A avaliação de cada um deles será realizada no capítulo VI, aqui nos contentaremos de apenas descrevê-los.

## V.2 – Métodos de adoçamento

Os métodos de adoçamento proporcionam maneiras de se realizar a suavização das áreas de transição, ou seja são métodos que calculam os pontos de controle da superfície **S3** na área onde não há necessidade de manutenção dos pontos de controle nem da superfície **S1**, nem da superfície **S2**.

Para facilitar o entendimento dos métodos nos referenciaremos aos pontos de controle da superfície **S1** por P, aos pontos de controle referentes a superfície **S2** por Q e aos pontos referentes a superfície **S3** por R. Descreveremos métodos que tem, em sua maioria, a seguinte expressão geral:  $R = \alpha P + (1 - \alpha) Q$ , ou seja, na verdade o que variam são as ponderações atribuídas aos pontos de controle das superfícies **S1** e **S2** na região de transição. Observemos também que a soma dos pesos de P e Q é 1, isto garante que o ponto R a ser encontrado estará no segmento de reta que liga P a Q, logo a região de transição (vide Fig.V.4) estará entre **S1** e **S2**. O objetivo dos métodos é então calcular o valor de  $\alpha$  que proporciona a ponderação dos pontos de controle que melhor satisfaz as condições de suavidade nas juntas segundo algum critério.

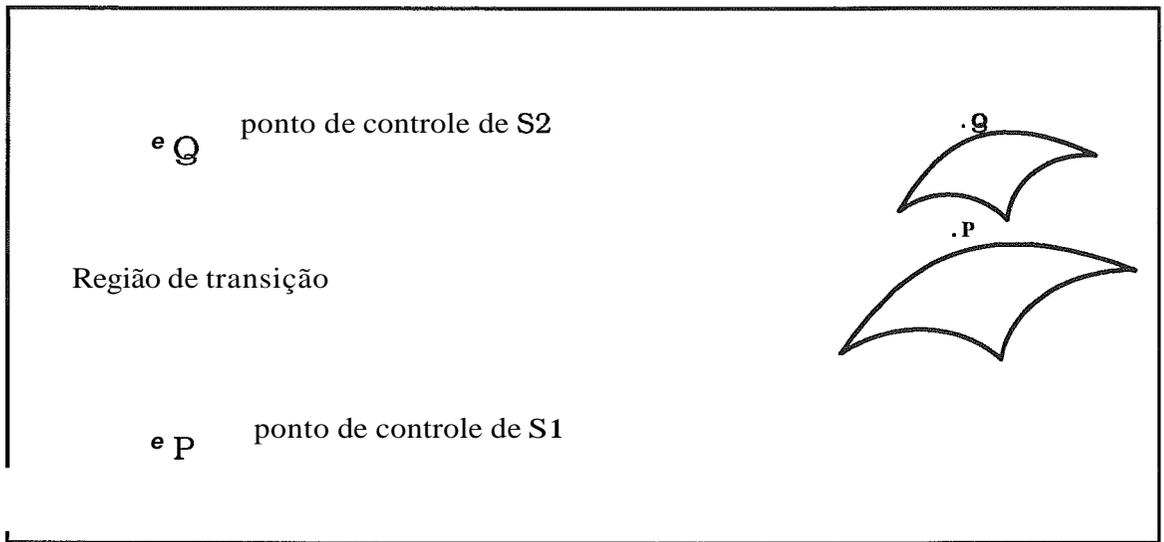


Fig.V.4 Pontos de controle e região de transição.

A seguir, são apresentados alguns métodos de adoçamento :

MÉTODO1 – Média aritmética dos pontos de controle das superfícies S1 e S2. Neste método temos que  $\alpha = \frac{1}{2}$ , ou seja o peso de P e Q são iguais, a expressão de R fica então:

$$R = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q, \text{ (vide Fig.V.5).}$$

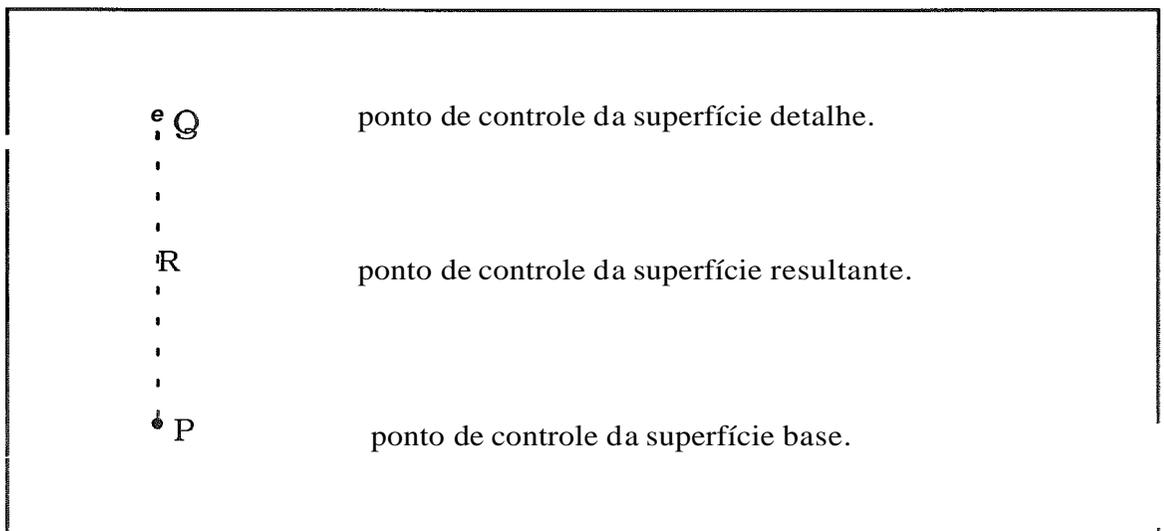
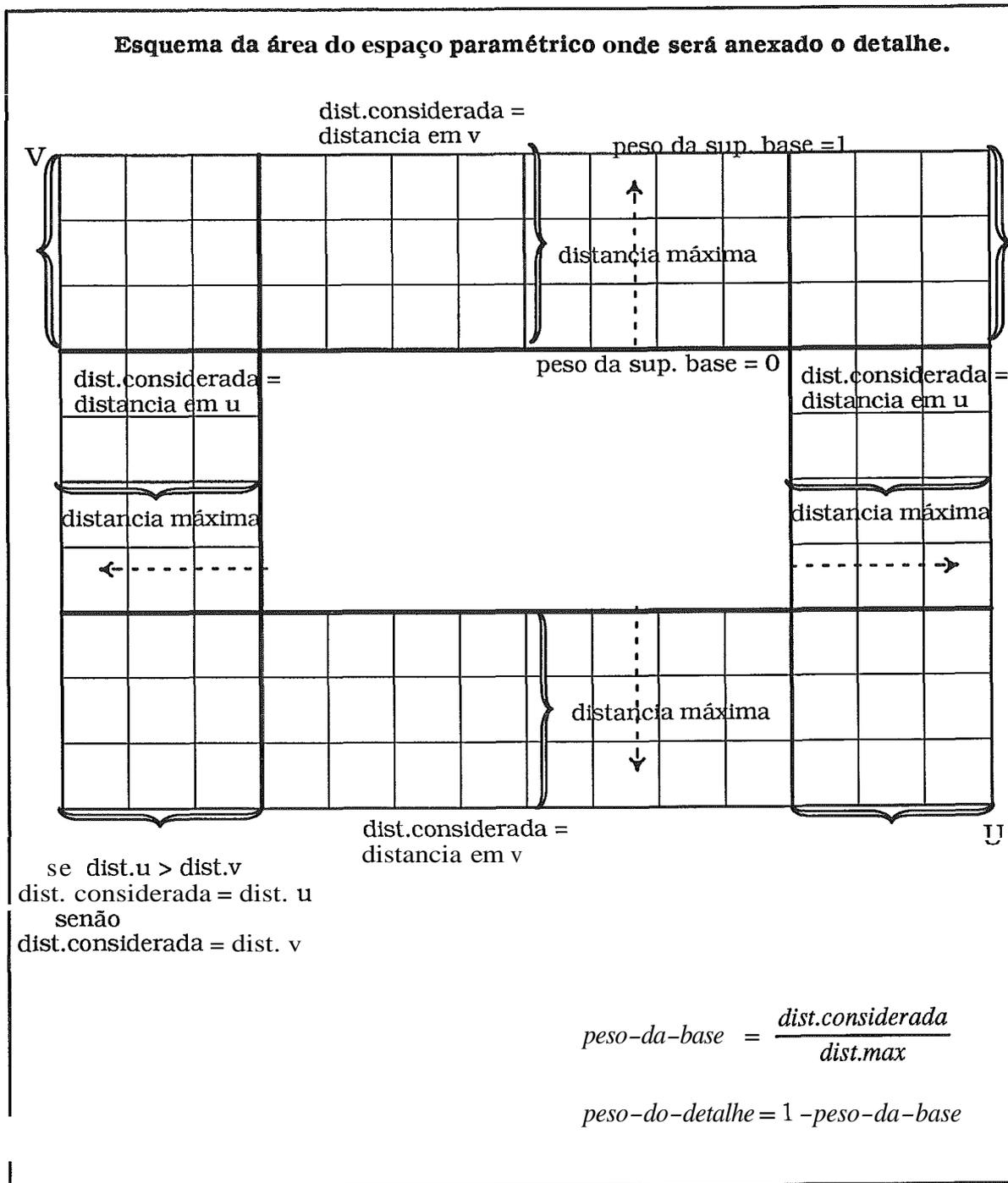


Fig.V.5 Método 1.

**MÉTODO2** – Neste método os pesos de P e de Q são calculados segundo a posição que ocupam na região de transição. Esta posição é definida na área de transição do espaço paramétrico. Nesta área os parâmetros que estiverem mais próximos a borda externa que delimita a área onde S2 será anexada determinarão um peso maior para P (que pertence a superfície base) e os parâmetros que estiverem mais próximos a área a ser preservada determinarão um peso maior para Q.

Na Fig.V.6 ilustramos o cálculo dos pesos dos pontos controle em função da posição definida na área de transição.



**FigV.6** Cálculo dos pontos de controle do detalhe e da superfície base pelo método 1.

### V.3- Unificação de bases

Na seção precedente, supomos que a superfícies envolvidas estavam descritas na mesma base, contudo, comumente isso não acontece. Neste caso é necessário unificar as bases,

ou seja fazer uma mudança de forma que as superfícies passem a ser descritas pelo mesmo conjunto de funções de base.

Para efetuar a unificação das bases, ou melhor descrever as superfícies envolvidas no mesmo espaço vetorial, utilizamos o algoritmo de Oslo já discutido no capítulo III para funções. Para superfícies o algoritmo deve ser aplicado nas duas direções paramétricas independentemente. A inserção dos nós nas superfícies deve ser realizada em cada uma das direções existentes da malha de nós do espaço paramétrico que gera a superfície. Neste caso calculamos os coeficientes de Oslo, vistos em detalhes no capítulo III, para uma das direções paramétricas e efetuamos o cálculo do novo poliedro de controle. Isto é feito considerando os polígonos componentes do poliedro e recalculando—se cada uma das coordenadas dos pontos de controle que o formam. Feito isso para uma das direções, o procedimento para outra direção é análogo (vide Fig.V.7). Uma vez unificadas as bases pode—se fazer a colagem das superfícies, já tendo—se ambas descritas na mesma base de nós.

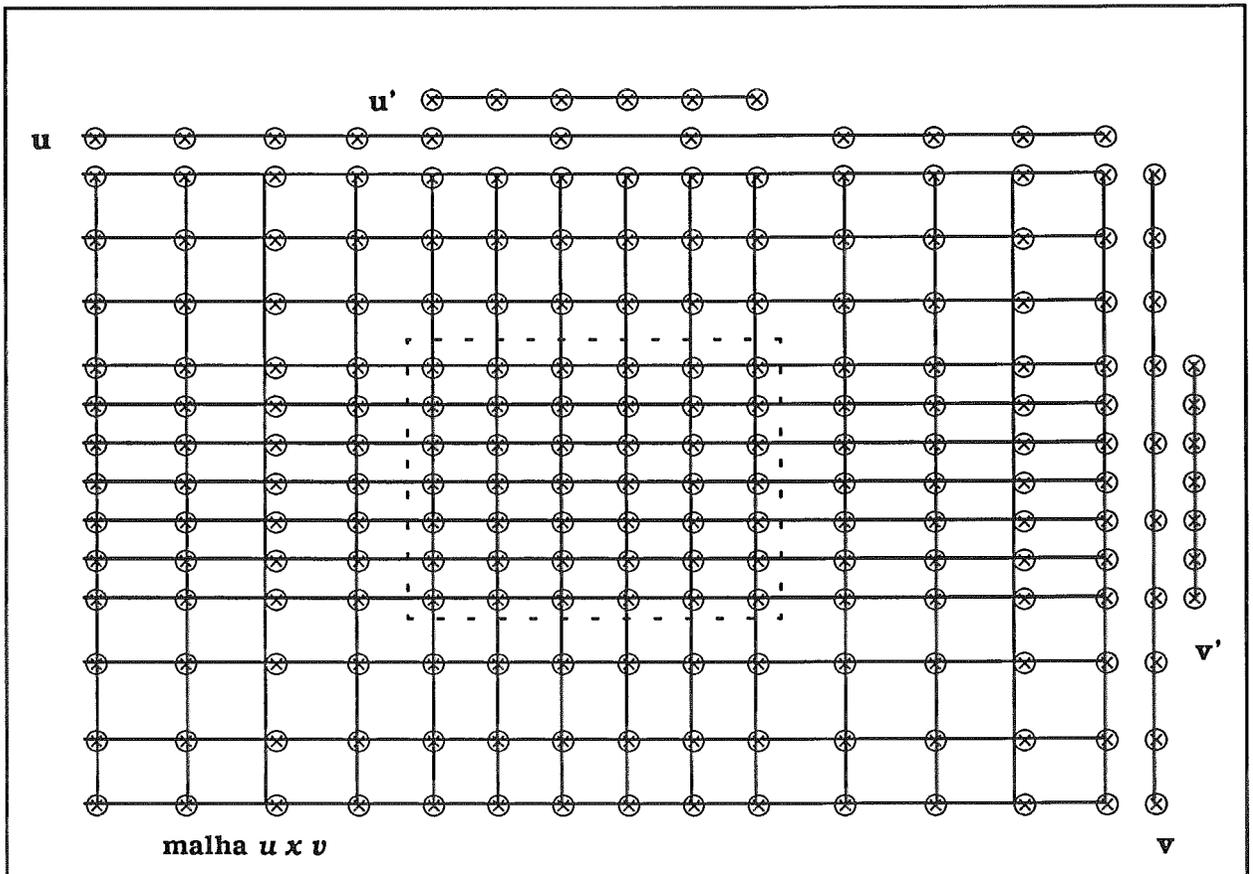


Fig.V.7 Inserção dos nós nas direções  $u$  e  $v$ .

#### V.4 – Localização

Esta operação é realizada com o intuito de se posicionar as superfícies espacialmente. Existem duas maneiras de se efetuar isso. Em ambos os casos é utilizada uma matriz para fazer a transformação dos pontos da superfície a ser adicionada. A superfície S1, que serve como base, é sempre suposta já localizada, ou seja o procedimento de localização é sempre efetuado sobre a superfície S2 a ser adicionada.

$$[P_{i,j} \text{ localizado}] = [P_{i,j}] \cdot M$$

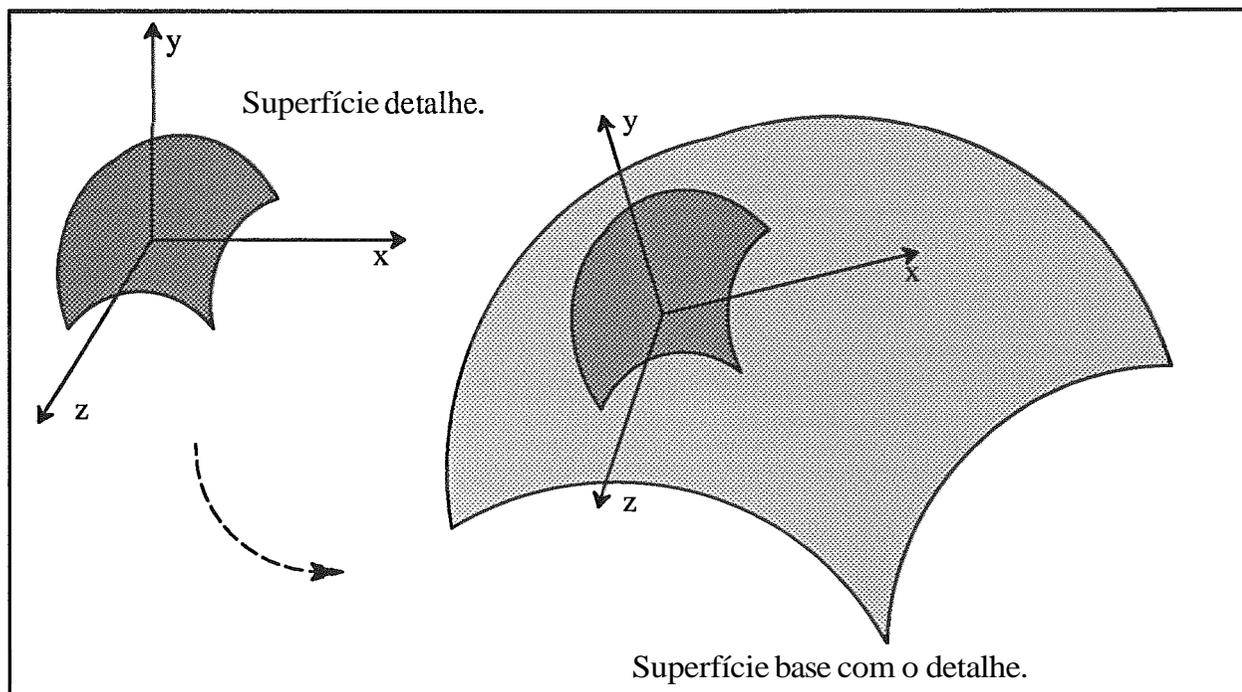
Sendo:

$P_{i,j}$  os pontos de controle da superfície

$M$  é a matriz de transformação

As duas formas existentes de fazer a localização têm como objetivo dar uma maior flexibilidade para a colagem das superfícies no espaço. Uma primeira forma de localizar a superfície S2 é localizá-la independente da superfície S1. Este posicionamento é considerado rígido no sentido que a posição da superfície base não tem qualquer influência sobre a localização da superfície S2, ou seja alterações na superfície S1 não alteram a localização de S2. O posicionamento é feito através de uma matriz de transformação, que neste caso é fornecida pronta, aplicada sob todos os pontos de controle da superfície a ser adicionada.

No segundo método o sistema de coordenadas que descreve a superfície a ser adicionada (S2) é localizado perpendicularmente a um ponto da superfície base. Neste caso o ponto da superfície onde o sistema será localizado é dado pela fixação dos parâmetros  $(\bar{u}, \bar{v})$ . Neste método alterações na superfície base (S1) alteram onde o S2 deve ser colocado (vide Fig.V.8).



FigV.8 Localização de um detalhe relativo a superfície base.

Para calcular o sistema de referências normal ao ponto dado, são calculadas as derivadas parciais em cada uma das direções paramétricas, ou seja são calculados por:

$$d1 = \left( \frac{\partial X(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial Y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial Z(u, v)}{\partial u} \right)$$

$$d2 = \left( \frac{\partial X(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial Y(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial Z(u, v)}{\partial v} \right)$$

onde:

$d1$  e  $d2$  são vetores tangentes a superfície  $S1$  no ponto  $(\bar{u}, \bar{v})$  que nos fornecem duas direções para os eixos.

A fim de calcular a direção do terceiro eixo, que deve ser normal a  $d1$  e  $d2$ , faz-se o produto vetorial destes  $(d1 \times d2)$ .

Para achar o sistema de referência, associado ao ponto dado, falta dividir cada uma das coordenadas dos vetores componentes por sua norma. Fazendo isso temos:

$$\left( \frac{d1}{|d1|}, \frac{d2}{|d2|}, \frac{d3}{|d3|} \right) \quad \text{ou} \quad (n1, n2, n3)$$

onde:

$n1, n2, n3$  são os vetores que definem o sistema de referencia a ser mapeada a superfície  $S2$ .

$| \cdot |$  é a norma euclidiana (dada pela expressão  $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$  )

Com estas informações montamos a matriz de transformação que leva do sistema canônico para o sistema associado ao ponto dado da superfície  $S1$ .

Para ser estabelecido o novo sistema de referência é necessário que os vetores  $d1$  e  $d2$  sejam linearmente independentes. Caso isso não ocorra não é possível calcular o novo sistema de referência e conseqüentemente localizar a superfície  $S2$ .

Temos que na localização cada ponto de controle da superfície  $S2$  é submetido a uma transformação realizada com o objetivo de posicioná-lo em relação a um ponto fixo no espaço ou relativamente a superfície base. Se for utilizada a segunda alternativa a matriz  $[M]$  é montada da forma descrita acima.

É importante deixar claro que a operação de localização da superfície a ser adicionada deve preceder sempre as etapas de refinamento e colagem, já que nestas etapas consideramos as superfícies envolvidas já devidamente posicionadas.

## V.5 – Considerações finais

Neste capítulo descrevemos a colagem de superfícies splines descritas na base B-Spline, onde destacam-se os métodos de adoçamento (ou suavização) e as formas de posicionar as superfícies espacialmente.

No próximo capítulo é discutida a implementação das idéias discutidas neste, considerando-se a possibilidade de estender as composições a mais de duas superfícies.

## Capítulo VI

### Representação hierárquica

Neste capítulo descreveremos a forma utilizada na implementação das idéias discutidas no capítulo V. Abordaremos os principais aspectos a nível da construção incremental de uma nova superfície. Serão tratados os métodos usados para fazer a manipulação das informações, realizar o processo de uniformização, colagem, suavização e geração da superfície de saída. Para isso, inicialmente será dada uma idéia geral da implementação sendo a seguir definida a estrutura de dados utilizada, a qual chamaremos superfície hierárquica.

#### VI.1 – Idéia geral

A partir do que foi descrito no capítulo anterior vamos abordar a implementação de uma solução recursiva que permite criar superfícies compostas de outras que por sua vez são constituídas de várias outras e assim sucessivamente (vide Fig. VI.1).

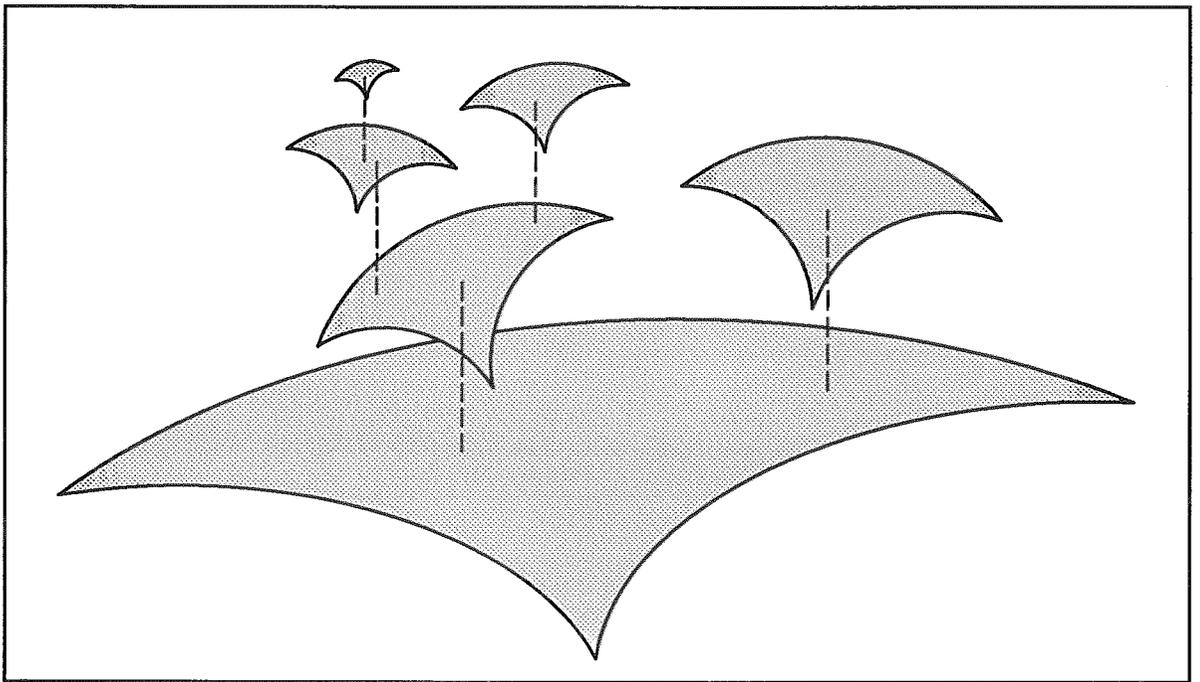


Fig. VI.1 Esquema de uma *superfície* composta por *outras*.

Em nossa abordagem estamos supondo que as superfícies B-Splines já existem e têm-se disponível as informações de sua representação. Desta maneira o que se deseja é um modo de organizar, manipular e adaptar tais informações tal que seja possível fazer, de maneira simples, a composição de superfícies onde na região de transição entre duas superfícies é definido um método para fazer seu adoçamento.

Para manipular tais superfícies e editar novas, é interessante que se disponha de mecanismos que possuam características voltadas para esse fim. Chamaremos de estrutura hierárquica a estrutura de dados que comporta as superfícies Splines que estão relacionadas e efetua uma série de operações que facilitam a criação e alteração de novas superfícies. A avaliação de uma superfície também é feita sobre as informações constantes na estrutura hierárquica.

A representação hierárquica de superfícies, permite obter, na edição, níveis de alteração distintos. Podemos então realizar modificações mais globais, se alteradas as superfícies de níveis mais elevados, até modificações localizadas a uma porção da superfície, quando efetuadas sobre superfícies localizadas em níveis mais baixos da estrutura.

Como restrições para a solução tem-se que as superfícies são supostas do mesmo grau, da mesma natureza e descritas numa mesma base (no caso a base B-Spline).

## VI.2 – Estruturas Hierárquicas

Referenciaremos como estrutura hierárquica a estrutura de dados que contem uma superfície Spline e tem definidas uma série de operações que objetivam sua manipulação. As superfícies, na estrutura, serão chamadas de superfícies hierárquicas ou componentes, por estarem no formato conveniente à manipulação hierárquica podem ainda receber ainda uma classificação adicional. Uma superfície hierárquica pode ser classificada como superfície mãe ou base, se possuir superfícies anexadas sobre elas, ou superfície filha ou detalhe se estiver anexada a alguma superfície base. Uma superfície hierárquica pode ser mãe e filha, dependendo da instância considerada.

A estrutura hierárquica pode ser ilustrada (vide Fig. VI.2) como uma árvore onde a raiz é a superfície base de todas as outras e as folhas são as superfícies Splines de níveis mais baixos, sendo ambas descritas no formato de Superfície Hierárquica.

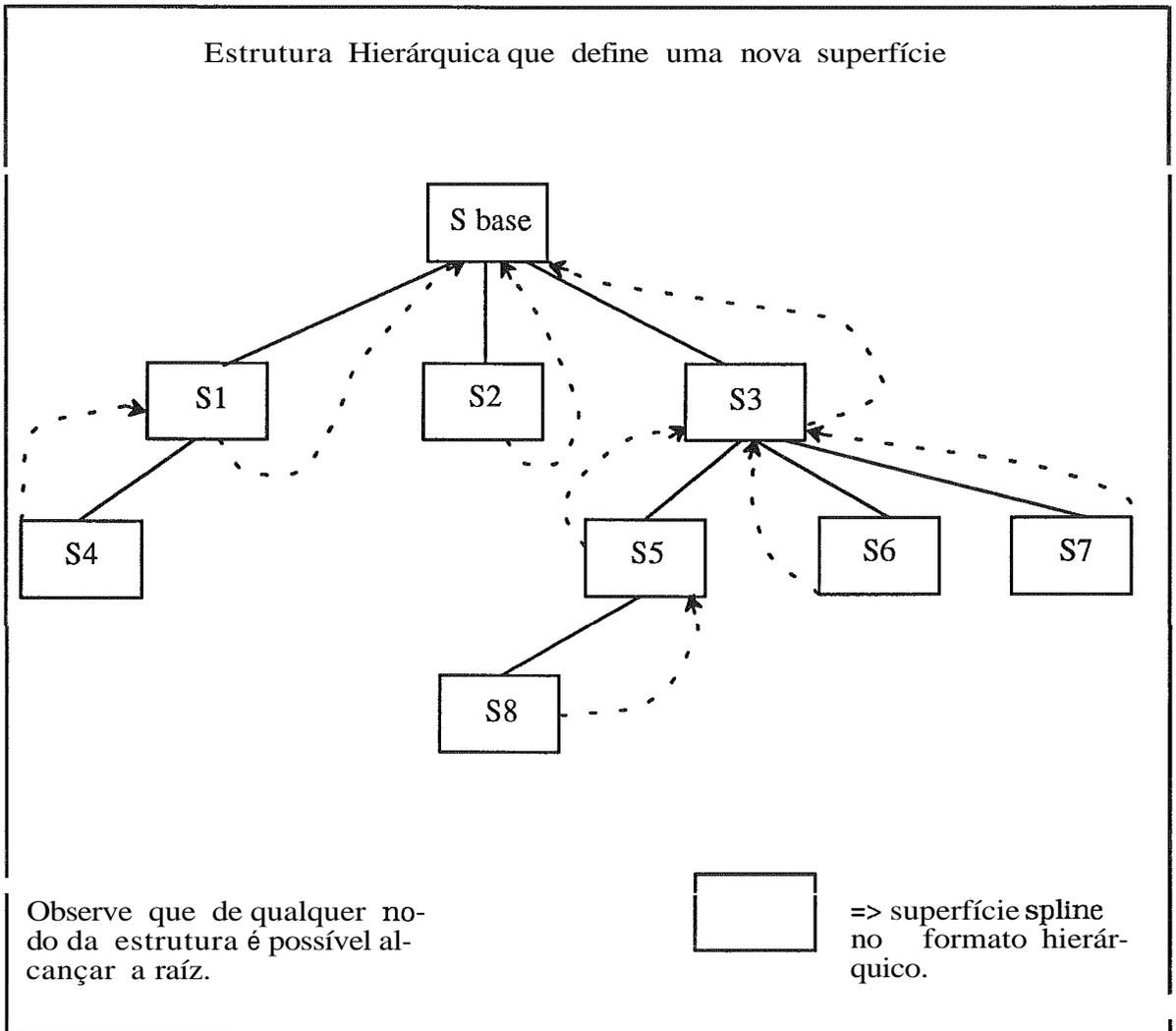


Fig.VI.2 Estrutura hierárquica.

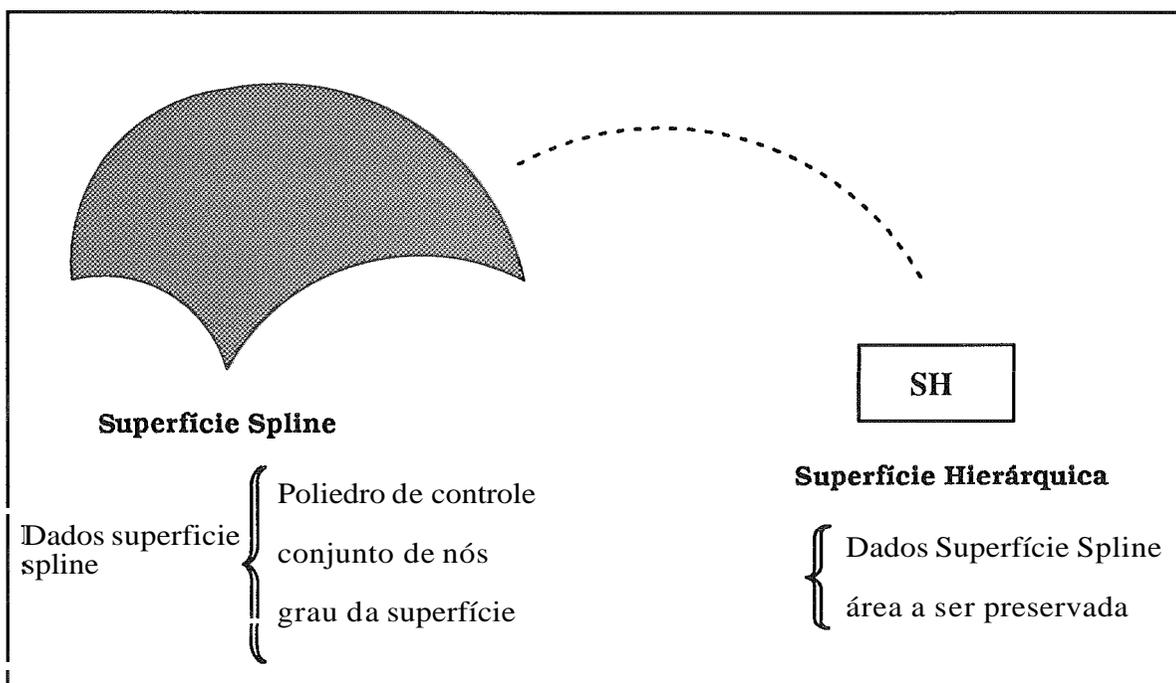
As superfícies hierárquicas como foram vistas acima devem relacionar-se com a SH de nível mais alto (SH mãe) e com a SH de nível mais baixo (SH filhas). Estes relacionamentos é que dão origem às novas superfícies. Uma vez construída a superfície desejada (através das SH) a estrutura hierárquica pode ser convertida a superfície (não hierárquica, com o mesmo formato da entrada), a curvas (descritas por conjuntos de pontos de controle por conjuntos de nós) ou simplesmente avaliado um ponto sobre a superfície hierárquica.

### VI.3 – Manipulação de superfícies hierárquicas

Uma vez criadas superfícies hierárquicas deseja-se que seja possível manipulá-las através de operações que permitam organizar, alterar, substituir e contruir uma nova SH

partindo-se das já existentes, possibilitando também a modificação de parâmetros que definem a superfície BSpline que originou a SH (por exemplo: poliedro de controle, nós, etc).

Em nosso desenvolvimento vamos sempre supor que estamos de posse de superfícies BSpline no formato hierárquico. Para isso devemos antes de qualquer coisa criar a SH. Para criação de uma SH basta conhecermos uma superfície spline e determinarmos a área a ser preservada. Sabidos estes dados, pode-se criar uma SH na sua forma mais primitiva, que representa, exceto por uma informação adicional (área preservada), exatamente a superfície BSpline originária, como ilustra a Fig.VI.3.



**Fig.VI.3** *Relacionamento entre a superfície e a superfície hierárquica.*

Além da criação de uma SH, existem outras operações que provêm mecanismos para facilitar a aplicação construir uma superfície no formato hierárquico. Tais operações podem ser classificadas da seguinte maneira:

### ***1) Operações de vinculação***

- Criar a superfície hierárquica a partir de uma superfície não hierárquica ( composta do poliedro de controle , nós e grau).
- Agregar uma superfície hierárquica a outra superfície hierárquica, definindo sua localização e sua forma de suavização.

- Desligar uma superfície hierárquica da superfície hierárquica que está em um nível superior ao seu.

## **2) Operações de consulta**

### *a) As informações sobre uma superfície específica:*

- Consultar informações a respeito da área onde uma superfície selecionada será anexada.
- Consultar informações que descrevem onde a superfície será localizada.
- Consultar número de pontos do poliedro de controle da superfície selecionada.
- Consultar valores do poliedro de controle da superfície selecionada.
- Consultar valores dos nós nas direção  $u$  e na direção  $v$ .
- Consultar valores da área preservada da superfície selecionada, ou seja área que não deve ser deformada no processo de geração de uma nova superfície hierárquica.
- Consultar o grau da superfície hierárquica selecionada.

### *b) A informações inerentes a estrutura hierárquica:*

- Devolver a próxima superfície de nível imediatamente inferior a superfície selecionada (dada uma SH mãe devolver a próxima filha).
- Devolver a superfície hierárquica de nível imediatamente superior a superfície selecionada (dada uma SH filha devolver a SH mãe).

## **3) Operações de troca ou substituição de informações na superfície selecionada:**

- Substituir informações que descrevem onde a superfície será localizada ou seja alterar a forma pela qual a superfície filha se relaciona com a mãe.
- Substituir valores do poliedro de controle da superfície selecionada.
- Substituir valores dos nós nas direção  $u$  e na direção  $v$ .

- Substituir valores da área preservada da superfície selecionada, ou seja, da área que não deve ser deformada no processo de geração de uma nova superfície.
- Substituir o grau da superfície selecionada.

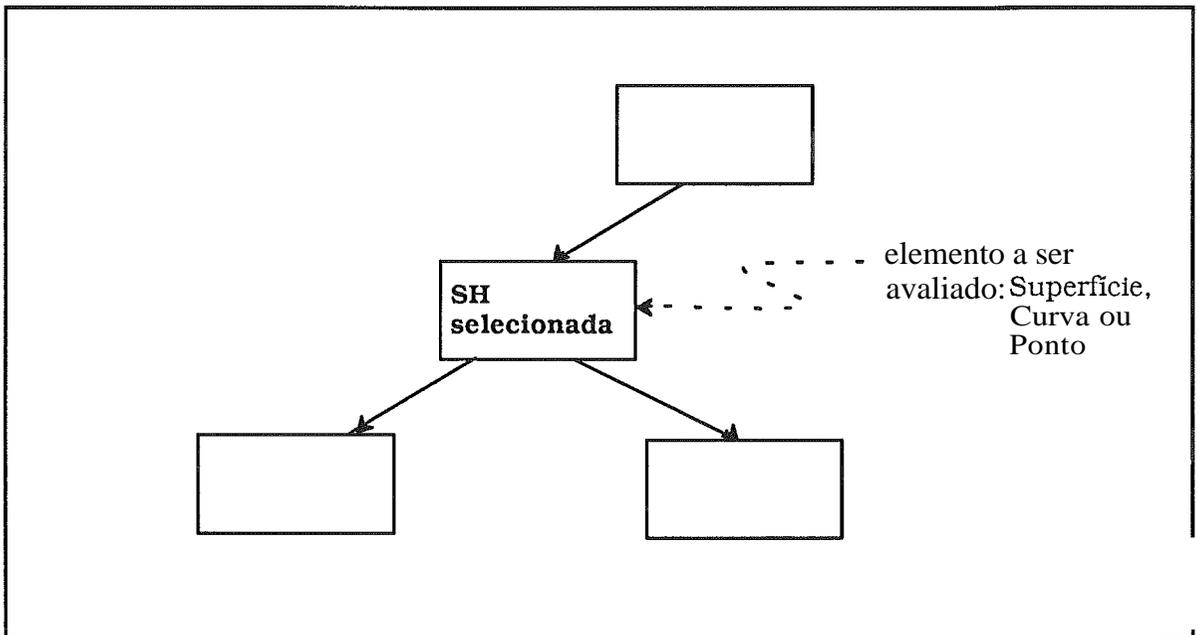
#### **4) Operações auxiliares:**

- Copiar uma superfície hierárquica para outro lugar, ou seja reproduzir uma superfície no formato hierárquico objetivando-se, por exemplo, anexá-la a diferentes lugares da superfície base.
- Liberar uma área previamente ocupada por uma superfície hierárquica que deva ser removida.

## **VI.4 - Avaliação de pontos, curvas e superfícies**

É neste momento que se deve processar as diferentes informações inseridas na estrutura hierárquica; este processamento visa levar a avaliação dos elementos desejados.

A avaliação de pontos, curvas e superfícies (que serão genericamente referidos como elementos da superfície hierárquica) são o objetivo final do método. Uma vez gerada a superfície deve ser possível achar os elementos da SH de maneira simples. A avaliação é feita relacionando-se, na estrutura, a superfície hierárquica a partir da qual se deseja fazer avaliar e especificando-se também o tipo de elemento para se escolher que superfícies devem ser avaliadas (vide Fig. VI.4).



*Fig.VI.4 Avaliação de um elemento no formato hierárquico.*

As superfícies hierárquicas são localizadas, refinadas e coladas à partir do momento que se solicita a avaliação de um dos elementos da SH, pois somente neste instante se tem necessidade de efetuar os cálculos dos pontos de controle que descrevem a superfície resultante com o acréscimo das superfícies hierárquicas detalhe. Iniciamos o processo de avaliação com a localização das superfícies, seguindo o processo de refinamento, colagem e suavização.

#### **VI.4.1 – Seleção das superfícies a serem percorridas**

Na avaliação de superfícies será necessário avaliar toda a estrutura hierárquica, ou seja haverá necessidade de percorrer cada uma das superfícies componentes da estrutura. Entretanto na avaliação de curvas e pontos sobre a superfície isso não será, por vezes necessário. Com isso queremos dizer que no caso de avaliação de pontos e curvas é interessante que se faça apenas a avaliação das superfícies que realmente interferem no valor do elemento desejado (pontos/curvas). Dessa maneira se consegue evitar cálculos desnecessários de localização, refinamento e colagem de superfícies que não influenciarão nos resultados finais.

Para fazer isso devemos selecionar a partir daí aquelas superfícies que se encontram nas regiões que efetivamente devem ser computadas (vide Fig.VI.5).

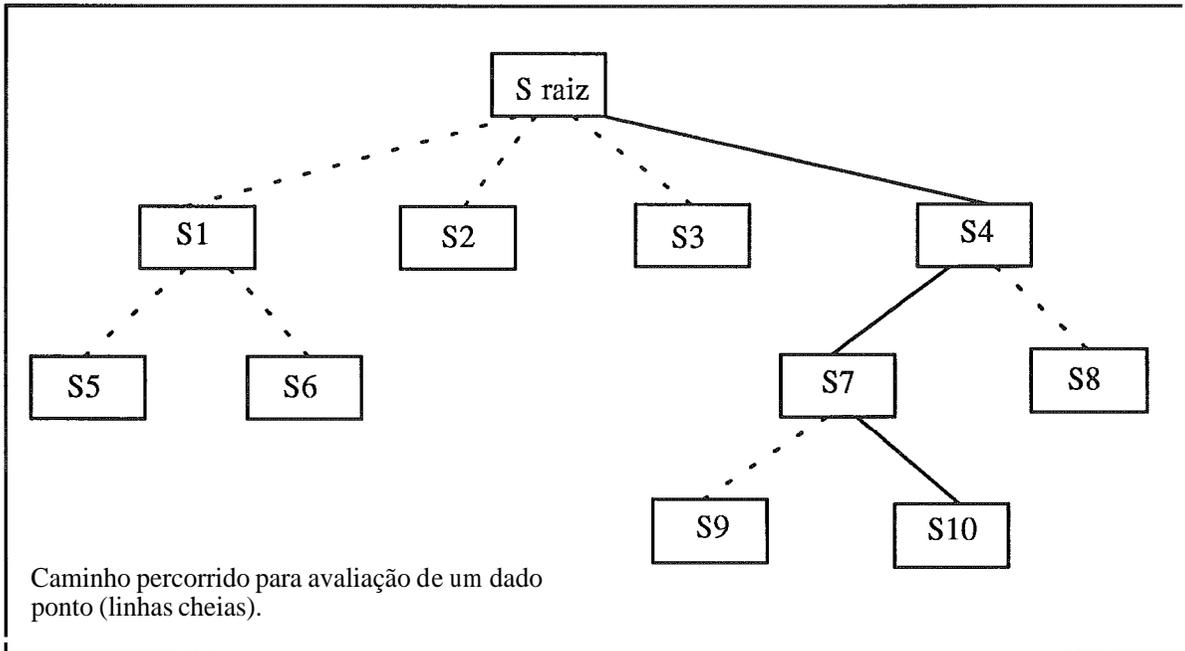


Fig.VI.5 Seleção de um caminho a ser percorrido na avaliação de um dado elemento.

#### VI.4.2 - Avaliação de um ponto

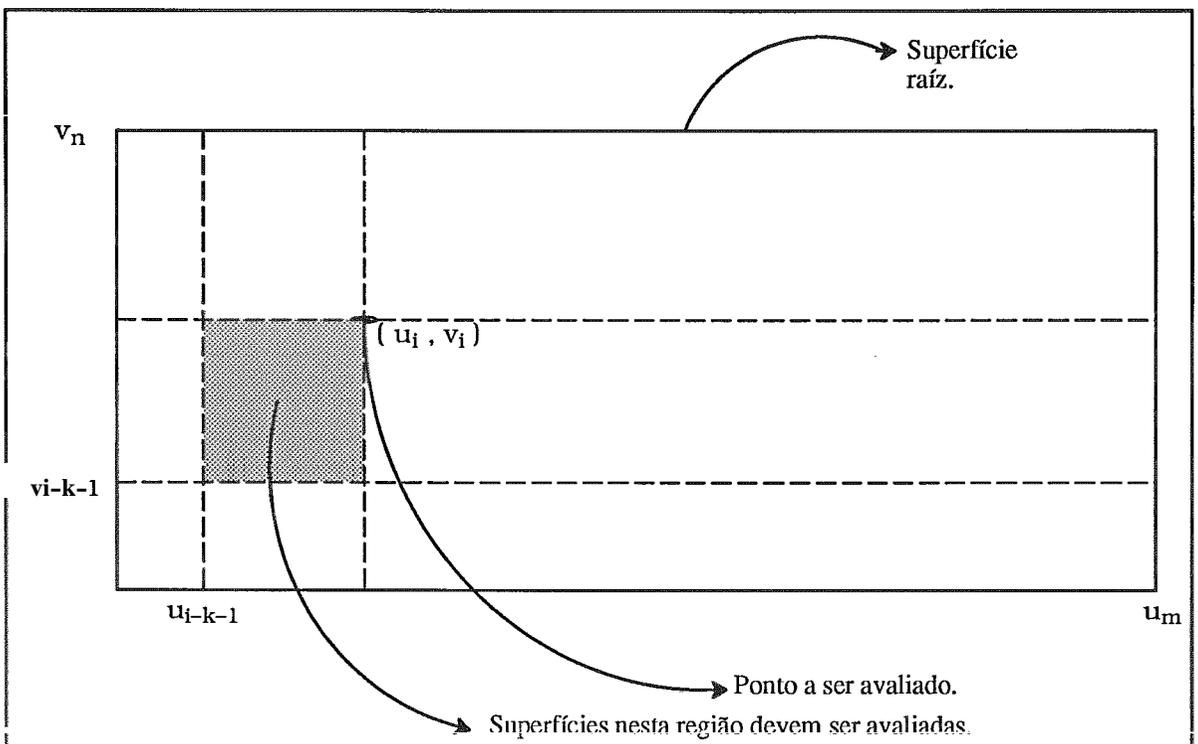
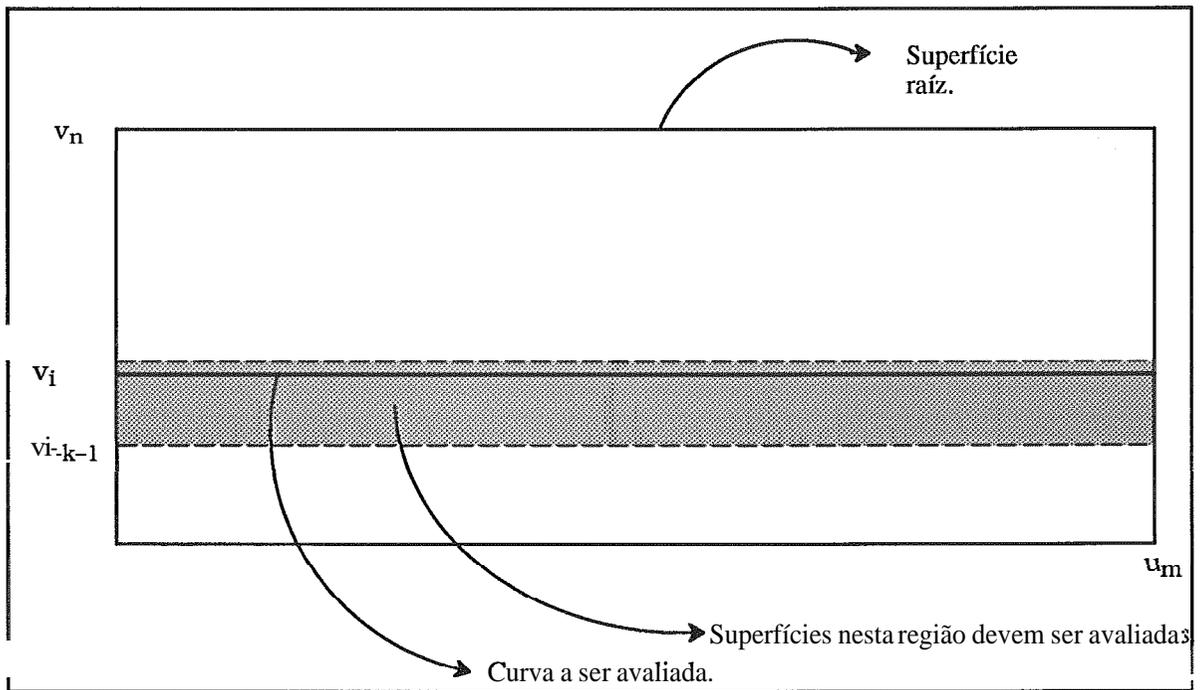


Fig.VI.6 Região a ser analisada, quando avaliado um ponto.

Pela figura FigVI.6, superfícies que se localizem na região:  $([u_{i-k-1}, u_i], [v_{i-k-1}, v_i])$  devem ser avaliadas, ou seja, aquelas superfícies que serão anexadas numa área que englobe esta região devem ser selecionadas.

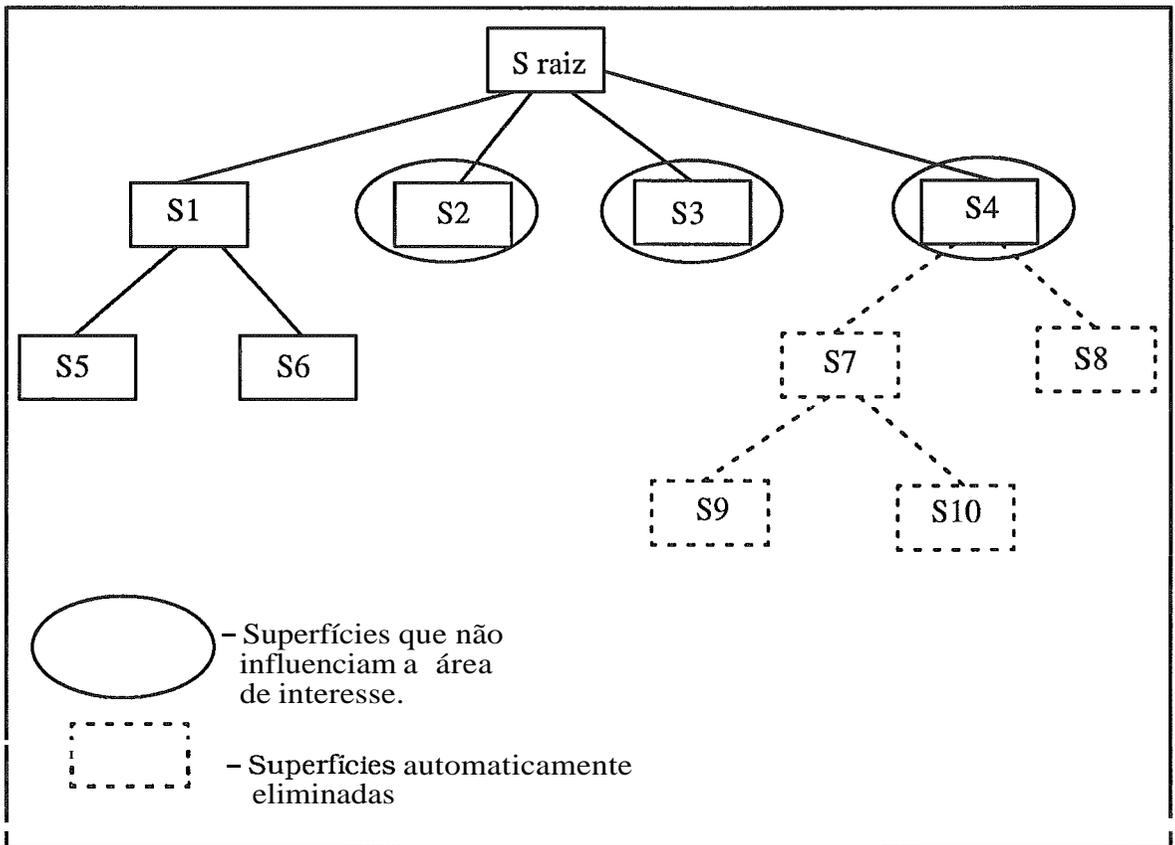
**VI.4.3 - Avaliação de uma curva**

Neste caso, devem ser testadas as superfícies que cortam, numa direção paramétrica a curva avaliada, sendo neste caso considerado um dos parâmetros fixo.



*Fig.VI.7 Região a ser analisada, quando avaliada uma curva.*

Uma vez selecionada uma superfície os mesmos testes devem ser feitos para as superfícies componentes, contudo uma vez descartada, todas as superfícies associadas a ela em níveis inferiores podem ser automaticamente eliminadas, como ilustra a Fig VI.8.



**Fig.VI.8** Esquema de uma estrutura hierárquica onde estão assinaladas as SH que não influenciam na avaliação de uma curva

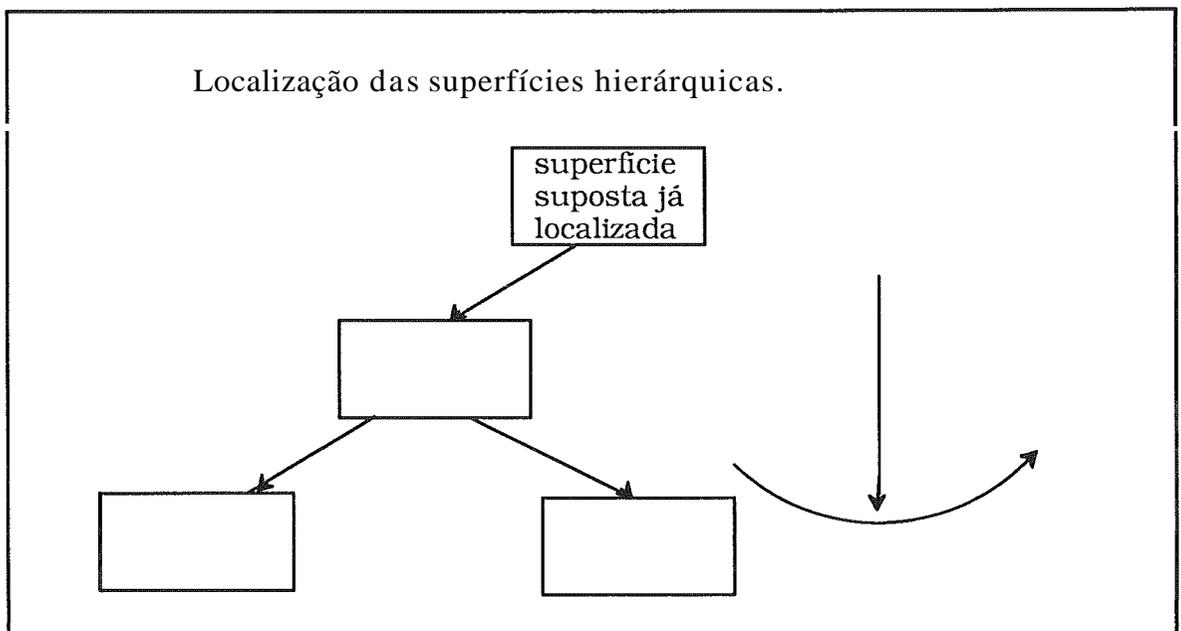
## VI.5 – Localização das superfícies

Na superfície hierárquica existe um campo que descreve como uma SH é localizada (vide capítulo V, seção 3), nesta seção descreveremos o que é e como é feita a localização na estrutura hierárquica.

Para uma superfície hierárquica ser formada pela composição de outras, estas devem estar posicionadas, independentemente ou não da superfície base, em algum lugar do espaço quando for feita a junção das SH envolvidas como vimos no capítulo anterior, tal fato se dá com o objetivo de facilitar a aplicação na criação de novas superfícies. Devemos efetuar a localização da superfície hierárquica detalhe em relação à superfície que na operação considerada, está servindo como base, ou seja devemos posicionar uma superfície em relação a sua mãe. Isso faz com que uma SH antes de ser ligada a outra deva estar sempre localizada;

isto, neste trabalho, se faz através de um dos métodos pré-estabelecidos, vistos no capítulo V, onde a escolha do método é realizada no momento que se agrega uma superfície a outra. É bom mencionarmos que estamos considerando que as superfícies hierárquicas estão descritas no sistema de coordenadas cartesiano.

A localização é feita sempre sobre a superfície hierárquica filha, ou seja, a superfície hierárquica base é sempre suposta fixa. Por esta razão a localização das superfícies hierárquicas se processam sempre da raiz para as folhas da estrutura hierárquica, ou melhor, a localização é realizada das SH filhas de nível mais elevado para as SH filhas de níveis mais baixos (vide Fig. VI.9). Isso garante que a superfície hierárquica base está sempre no lugar correto.



*Fig. VI.9* Localização é feita de cima para baixo na estrutura hierárquica.

No caso do detalhe ser localizado numa região fixa do espaço, ou seja não se sujeitar a movimentos da superfície base, é aplicada uma matriz de transformação, matriz esta, fornecida à estrutura no momento que se agrega uma superfície hierárquica a outra. Neste caso é possível não só localizar mas também mudar as dimensões da superfície ou mesmo girá-la. A matriz de transformação (que comporta rotação, translação e escala) é descrita em coordenadas homogêneas.

No caso da superfície ser localizada em relação a base, o sistema de coordenadas que descreve o detalhe é localizado perpendicularmente a superfície base, em um ponto escolhido no momento em que se agrega uma superfície hierárquica a outra. Para calcular a matriz de

transformação, neste caso, são calculadas as derivadas parciais da superfície mãe no ponto especificado ( via parâmetros  $u$  e  $v$  ), o que fornece duas direções tangentes a superfície no ponto; para calcular a terceira componente (na direção perpendicular a superfície no ponto) se faz o produto vetorial dos dois vetores tangentes. Com isso se estabelece a matriz de transformação, que leva do sistema de coordenadas canônico  $((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$  para este novo sistema descrito pelas direções calculadas acima.

Uma vez achada a matriz de transformação, esta é aplicada aos pontos de controle da superfície hierárquica filha a fim de calcular os novos pontos de controle. Estas matrizes, que servem para localizar a superfície filha, só afetam os pontos de controle desta, não alterando o restante das informações contidas na SH nem alterando os relacionamentos na estrutura hierárquica.

## VI.6 – Uniformização de superfícies

A uniformização das superfícies, discutida em detalhes no capítulo precedente, é feita de modo a que as representações de duas superfícies a serem operadas fiquem compatíveis.

Ao final de cada refinamento têm-se duas SHs, onde existe uma região da SH mãe, delimitada anteriormente, que possui o mesmo número de pontos de controle e mesma razão entre os nós existente na SH filha, ou seja a cada refinamento efetuado (realizado entre duas superfícies) é feita a respectiva junção das superfícies envolvidas. No caso da estrutura hierárquica, tal operação é realizada de baixo para cima na estrutura hierárquica, sendo refinadas e coladas primeiro as superfícies de níveis mais baixos. O resultado final do processo de refinamento são duas superfícies hierárquicas descritas por um número maior de pontos de controle.

## VI.7 – Colagem de superfícies

A colagem de superfícies se faz logo após a uniformização das superfícies, ou seja duas a duas as superfícies são uniformizadas (caso seja preciso) e adicionadas, ou seja após a colagem passa a existir apenas uma superfície que é o resultado da junção das duas superfícies

envolvidas, onde são utilizados um dos métodos de suavizações descritos no capítulo V anterior. O processo de colagem pode ser dividido em duas etapas a primeira envolvendo os pontos de controle da área que deve ser preservada, a segunda envolvendo as áreas onde deve ser feita a suavização.

As informações necessárias a suavização das superfícies é obtida na própria estrutura e são fornecidas no momento em que se faz a ligação de duas superfícies no formato hierárquico.

A superfície hierárquica deve conter as seguintes informações necessárias para geração de uma nova SH:

#### *Tipo Superfície Hierárquica*

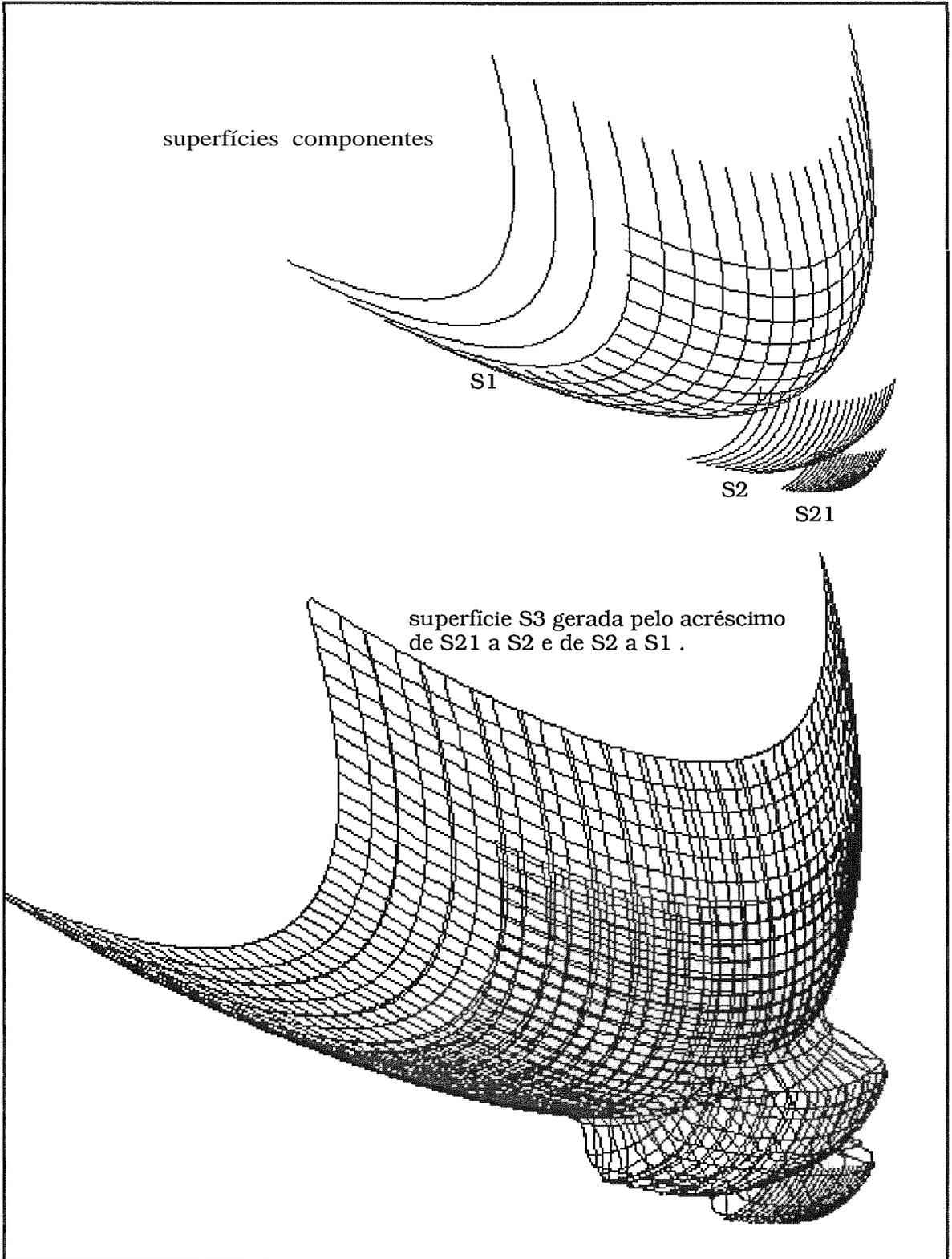
- grau
- número de linhas do poliedro de controle
- número de colunas do poliedro de controle
- descrição do poliedro de controle
- descrição dos nós na direção u (número de linhas + grau+1)
- descrição dos nós na direção v (número de colunas + grau+1)
- onde será agregada (area da superfície da nível superior onde será anexada a superfície corrente)
- como será agregada (localização da superfície que deve ser preservada quando esta for anexada a uma superfície de nível superior)
- método de adoçamento (estabelece como se comportará a superfície na região onde é possível mexer)
- mãe ( sh de nível superior)
- filha ( sh de nível inferior)

Os procedimentos disponíveis para acesso a estrutura já foram descritos anteriormente (vide seção VI.3).

## **VI.8 – Considerações finais**

A colagem de superfícies se faz utilizando-se uma estrutura que permite vários níveis de refinamento da superfície, fornecendo uma maior flexibilidade para criação e edição da superfície (vide Fig. VI.10).

No próximo capítulo serão avaliados os resultados obtidos na geração da superfície a partir de acréscimos de superfícies splines já editadas.



FigVI.10 Superfície composta incrementalmente por três superfícies splines.

## **Capítulo VII**

### **Avaliação dos resultados**

Nos capítulos anteriores foram discutidos aspectos da composição de superfícies, e apresentada a solução implementada. Sem dúvida o método de adoçamento escolhido é um fator importante para se chegar a uma superfície final satisfatória, pois para cada método, geramos uma superfície diferente, como já discutido no capítulo V.

Neste capítulo discutiremos o critério utilizado para fazer a avaliação da superfície. Será discutido o porquê da escolha e apresentados alguns resultados para o critério escolhido. Finalizando faremos uma avaliação geral à respeito do trabalho.

#### **VII.1 - Critério adotado - Curvatura**

É difícil observando-se na tela do monitor de vídeo verificar se uma superfície é suficientemente suave ou não. Isto ocorre porque embora globalmente a superfície "pareça" suave, localmente podem haver oscilações desagradáveis.

Uma forma de se analisar mais localmente a suavidade de uma curva ou superfície é fazer o cálculo de sua curvatura.

Neste trabalho o critério adotado para avaliar se a suavidade da superfície, gerada pela composição de outras superfícies, é satisfatória é a análise da curvatura. No caso da superfície a curvatura é calculada para cada ponto avaliando-se as linhas nas direções isoparamétricas.

A área que determinará diferenças entre as superfícies geradas é a área de transição, ou seja aquela cujos pontos de controle são determinados através de um dos métodos de adoçamento. Neste caso a avaliação da suavidade é feita avaliando-se as áreas sujeitas a suavização.

**VII.2 – Curvatura de uma curva**

Segundo FARIN[14] e DILL[24] "uma curva é suave se sua curvatura é continua e consiste de poucos pedaços monótonos". A expressão matemática que fornece a curvatura de uma curva, representada na forma paramétrica, é:

$$K(u) = \frac{\ddot{X}(u)\dot{Y}(u) - \ddot{Y}(u)\dot{X}(u)}{[(\dot{X}(u))^2 + (\dot{Y}(u))^2]^{\frac{3}{2}}}$$

onde:  $\ddot{X}(\cdot)$  e  $\ddot{Y}(\cdot)$  são as derivadas segundas das funções  $X(\cdot)$  e  $Y(\cdot)$  respectivamente.  $\dot{X}(\cdot)$  e  $\dot{Y}(\cdot)$  são as derivadas primeiras das funções  $X(\cdot)$  e  $Y(\cdot)$  respectivamente.

**VII.3 – Curvatura de uma superfície (K)**

É calculada a curvatura para cada uma das direções isoparamétricas. Chamaremos de  $K_u$  e  $K_v$  as curvaturas nas direções u e v, respectivamente, do espaço paramétrico. Inicialmente, pensou-se em usar a curvatura gaussiana ( $K_g = K_u * K_v$ ) como referência, poderíamos classificar então  $K_g$  do seguinte modo:

$K_u * K_v$	$K_g$	
mesmo sinal	> 0	Eliptica
sinais opostos	< 0	Hiperbólica
uma ou ambas zero	0	Cilíndrica

Analisando a tabela acima, podemos verificar que a curvatura gaussiana não é um bom critério de se avaliar se o método de adoçamento utilizado gerou uma superfície suave, isto porque a superfície pode ter, num ponto,  $K_1=0$  e  $K_2$  com um valor alto, que **transpareça** uma grande oscilação no outro sentido. Isto pode levar a uma conclusão errada quanto a suavidade existente na região de juntas e conseqüentemente quanto ao grau de satisfação que o método proporciona.

Se usarmos a curvatura média enfrentaremos o mesmo problema, quando as superfícies tiverem as curvaturas nas direções isoparamétricas (curvatura principal) de mesmo módulo e sinais contrários ter-se-á que a curvatura média é igual a zero, embora a superfície possa ter grande oscilação naquela área, ou seja poderemos ter regiões onde a curvatura média não detecte as oscilações existentes.

Utilizaremos neste trabalho duas medidas para a curvatura: a curvatura máxima que é o valor mais alto dentre as curvaturas principais, ou seja, neste caso a curvatura da superfície é dada pela curvatura na direção onde seu módulo possui maior valor. A segunda medida utilizada é a curvatura absoluta que é a soma dos módulos das curvaturas principais, neste caso os pontos que possuem curvatura diferente de zero têm seu valor acentuado.

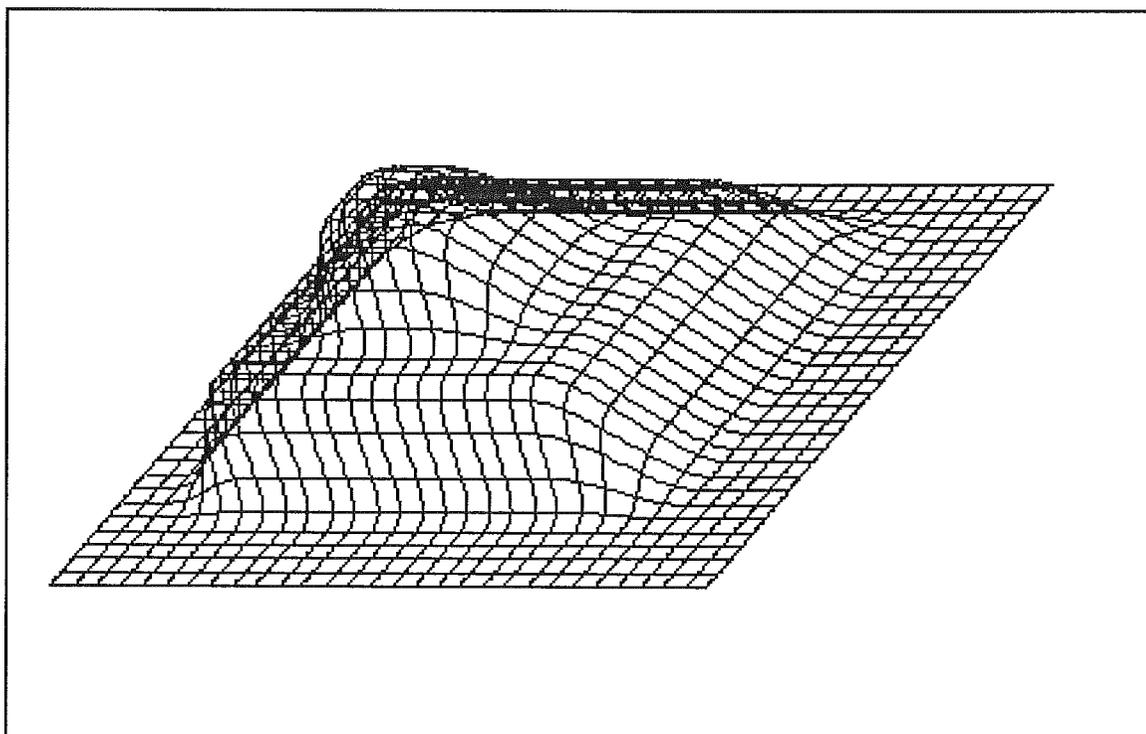
Neste capítulo são analisadas algumas superfícies exemplo. A seguir mostramos, para cada um dos métodos de adoçamento, a superfície resultante e os resultados obtidos para o cálculo de cada medida de curvatura.

#### **VII.4 - Exemplos**

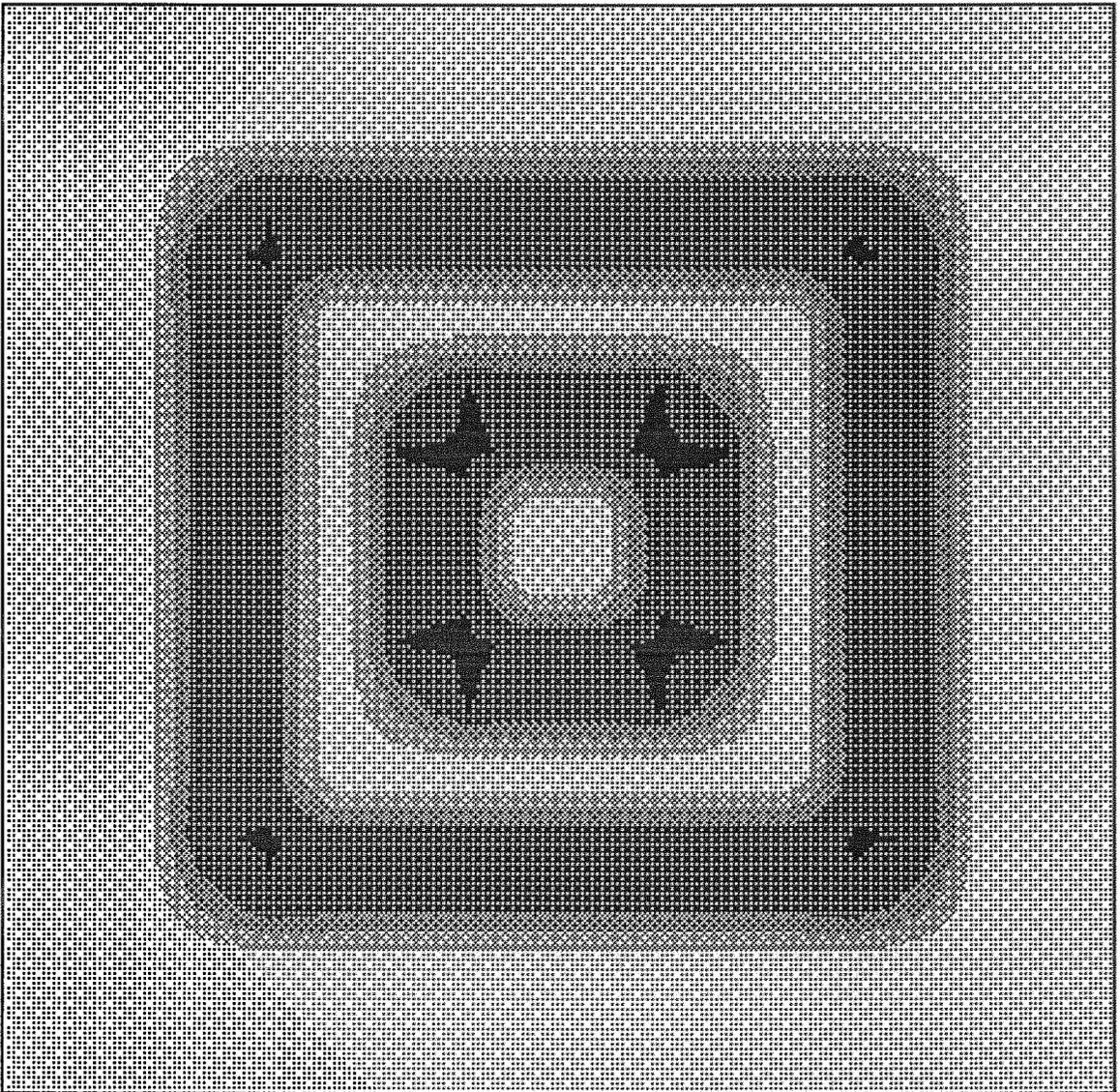
A partir de duas superfícies bicúbicas é gerada uma nova superfície; estas superfícies têm o formato plano devido ao alinhamento de seus pontos de controle. Neste caso fica claro a área de suavização sendo que ela será a grande responsável pela suavidade da superfície.

Superfície base gerada a partir de um poliedro de controle de 20x20 pontos de controle alinhados. A superfície detalhe é gerada a partir de uma malha de pontos de controle 10x10 também alinhados.

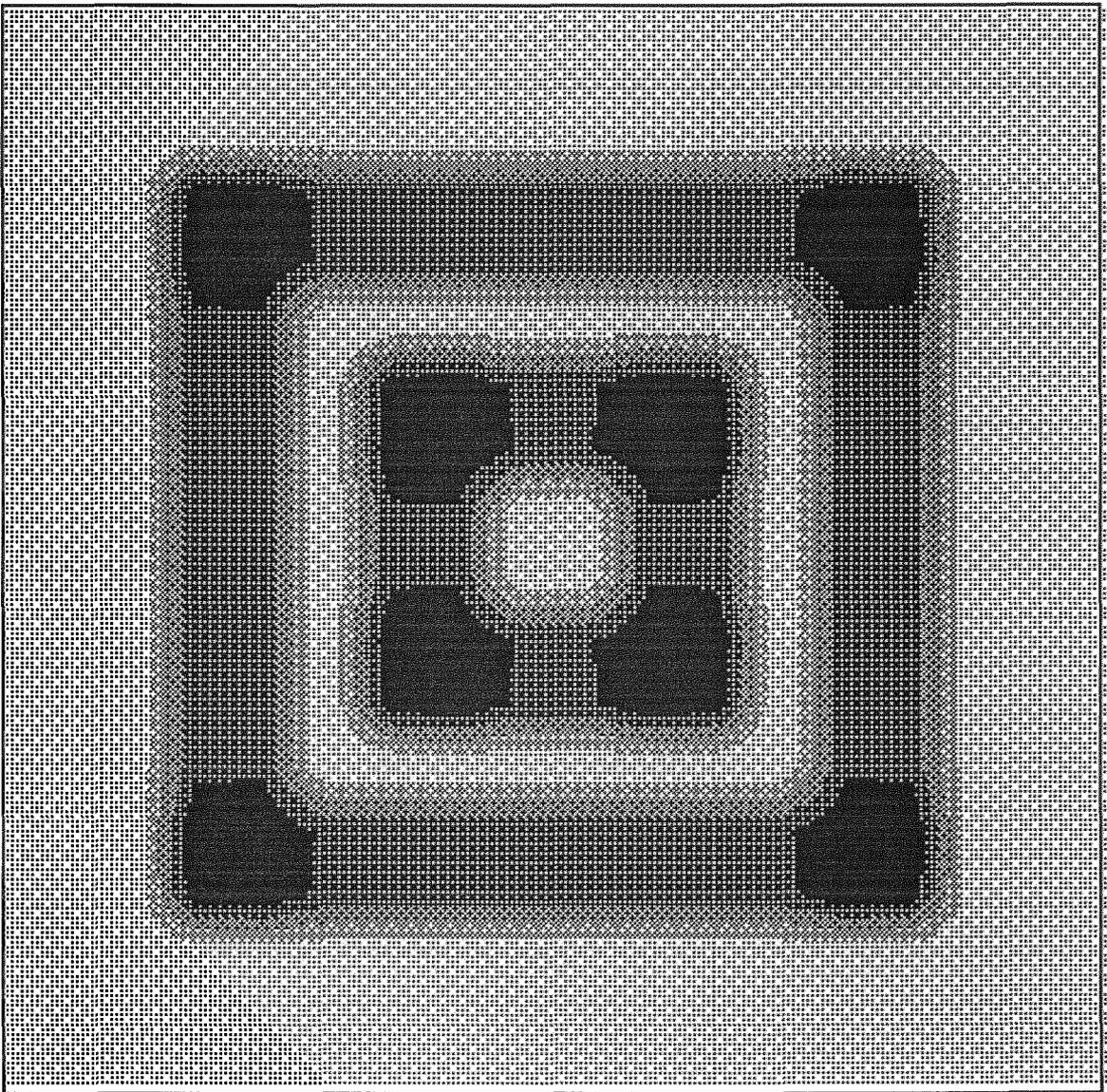
Apresentaremos respectivamente os resultados do método 1 (Fig.VII.1) e do método 2 (Fig.VII.4).



*Fig.VII.1 – Superfície resultante da utilização do método 1*



*Fig. VII.2 – Gráfico da curvatura máxima*



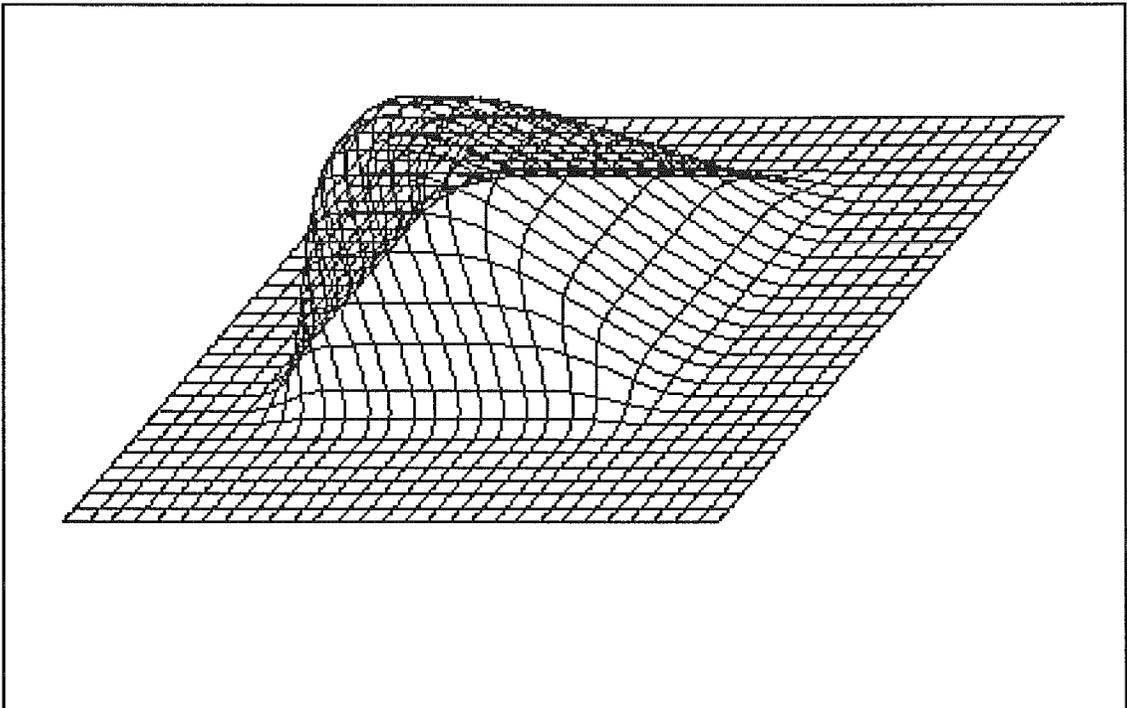
*Fig. VII.3 Gráfico da curvatura absoluta*

Curvatura zero é mostrada em cinza claro, o preto indica as curvaturas mais altas, sempre em módulo. No caso do gráfico da curvatura máxima (Fig. VII.2) observamos que a curvatura é simétrica, sendo nitidamente observado que a curvatura parte de zero aumenta por duas faixas até tornar-se cinza escuro nas laterais, mantendo-se constante até o "platozinho" mostrado na figura VII.1 onde a curvatura se torna zero, voltando a elevar-se até encontrar um novo retalho plano, correspondente à área a ser preservada e então temos de novo a curvatura nula. Neste caso o gráfico da curvatura mostra claramente que tal método não fornece uma boa transição já que surge a presença do "platozinho" na superfície definida na área de transição.

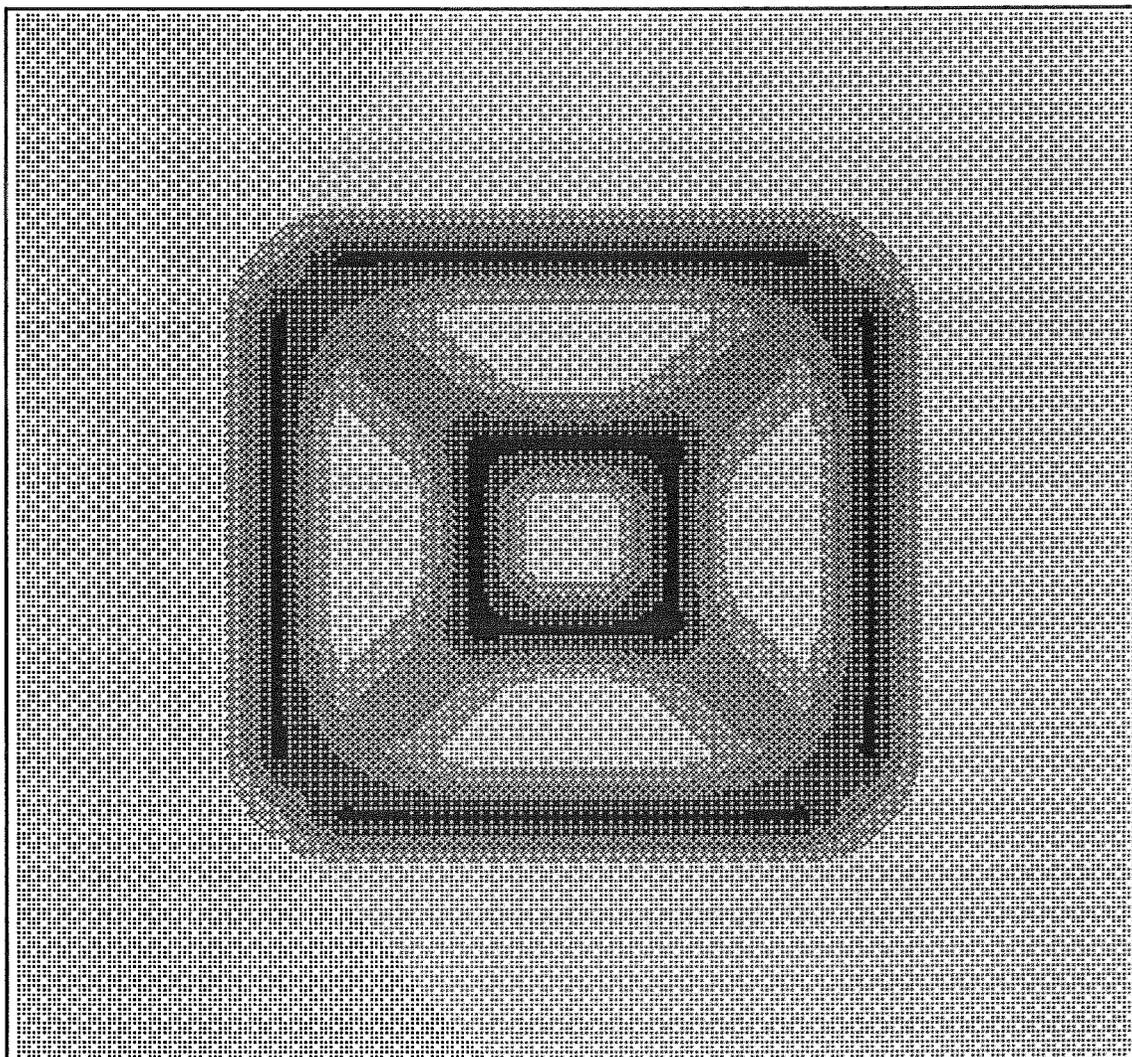
Considerando-se o gráfico da curvatura absoluta é observada a acentuação da curvatura nas bordas, próximas aos vértices da região de transição; pode-se notar que existe também uma simetria entre as bordas da região de transição do detalhe e as bordas da região de transição da superfície base.

A utilização do método 1 faz com que a superfície resultante apresente uma oscilação maior nos pontos extremos do retalho, próxima as regiões de borda tanto de "colagem" da superfície base quanto da borda referente à área a ser preservada.

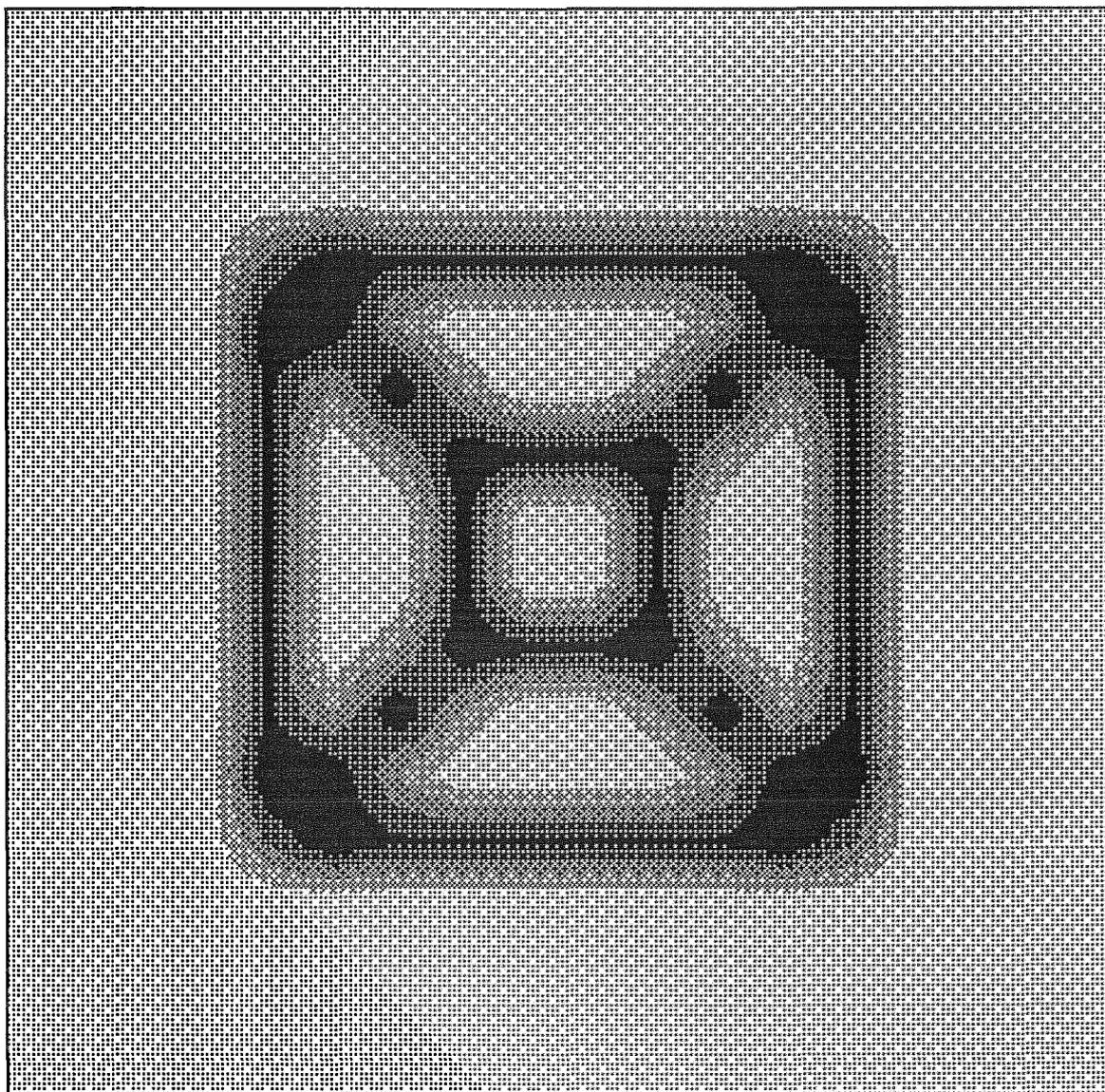
Pelo segundo método gera-se a seguinte superfície (Fig.VII.4):



*Fig.VII.4– Superfície resultante com a região de transição obtida a partir da aplicação do método 2, onde a posição do ponto é levada em consideração para realizar o cálculo dos pesos na interpolação dos pontos de controle.*



*FigVI.4* Gráfico da curvatura máxima, utilizando-se o método 2.



*FigVII.5 Gráfico da curvatura absoluta.*

No caso do gráfico da curvatura máxima em boa parte das regiões laterais é nula mostrando serem planas tais regiões. Próximo às regiões de início e final de transição existe uma curvatura maior, que logo se anula. Neste caso a superfície visualmente apresenta um bom nível de suavidade.

No caso da curvatura absoluta são observadas acentuações nas diagonais e aparecem porções em que a curvatura absoluta é mais elevada; tais porções seriam aquelas onde há uma declividade mais alta.

## VII.5 – Conclusões finais

O trabalho realizado oferece uma proposta para se fazer a criação incremental de superfícies splines. A proposta procura aproveitar as características das superfícies splines geradas pelo produto tensorial de funções de base B-Spline. A base B-Spline é um caso particular das funções de base Beta-Spline (vide BARSKY[32]); poder-se-ia usar tais funções para obter uma maior versatilidade e conseqüentemente melhores resultados. Outra opção seria usar funções de base racionais (vide FARIN[14]) com o objetivo de manter as superfícies envolvidas invariantes a transformações projetivas. Para isso seria preciso adaptar os algoritmos de inserção e avaliação de superfícies para estas bases.

Embora exaustivamente estudados, é promissora a pesquisa de algoritmos de inserção de nós com a finalidade de obter um algoritmo realmente mais eficiente para um maior número de casos.

Neste trabalho apenas foi abordado o problema de composição de superfícies já editadas. Como extensão poder-se-ia pensar num trabalho semelhante que permitisse, a partir da definição do nível de refinamento desejado para uma superfície, editar a região refinada de modo a criar o detalhe interativamente. Este aspecto é abordado no artigo do Forsey[8].

A abordagem hierárquica de implementação permite que se faça alterações em vários níveis, facilitando o usuário na criação e/ou edição de superfícies descritas no formato hierárquico.

Um grande inconveniente do método incremental apresentado para gerar superfícies é que a superfície resultante depende da ordem em que as superfícies componentes foram acrescentadas. Isto ocorre porque os métodos para fazer a anexação de uma superfície a outra dependem das posições dos pontos de controle envolvidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] COHEN, E. e SCHUMAKER L. L.,  
” Rates of convergence of control polygons”, *Computer Aided Geometric Design* 2,  
North Holland, pp.229–235, 1985.
- [2] BARR, A. H.,  
” Global and Local Deformation of solid primitives “, *ACM – Computer  
Graphics* , volume 18, no.3, julho, 1984.
- [3] MORTENSON, M. E.,  
*Geometric Modeling* , John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- [4] BARTELS, R. H., BEATTY, J. C. e BARSKY, B. A.,  
*An Introduction to splines for use in Computer Graphics & Geometric Modeling* ,  
Morgan Kauffmann Publishers, Inc., California, 1987.
- [5] BOEHM, W.,  
” On the efficiency of knot insertion algoritms “, *Computer Aided Geometric Design* ,  
1985.
- [6] LIN, C. H.,  
” Generalized Bernstein–Bézier curves and surfaces “, *Computer Aided Design* ,  
Butterworth & Co (Publishers) Ltd, pp.259–262, volume 20, no.5, Junho, 1988.
- BARRY, P. e GOLDMAN, R. N.,  
” Recursive proof of Boehm’s knot insertion technique “, *Computer Aided Design* ,  
Butterworth & Co (Publishers) Ltd, pp.181–182, volume 20, no.4, Maio, 1988.

- [8] FORSEY, D. R. e BARTELS R. H.,  
”Hierarquical B–Spline refinement“, *ACM – Computer Graphics*, volume 22, no.4,  
Agosto, 1988.
- [9] BRUNET, P.,  
”Increasing the smothness of bicubic spline surfaces“, *Computer Aided Geometric  
Design 2*, North Holland, pp.157–164, 1985.
- [10] FARIN, G., REIN, G., SAPIDIS, N. e WORSEY, A. J.,  
”Fairing cubic B–Spline curve“, *Computer Aided Geometric Design 4*, North Holland,  
pp.91–103, 1987.
- [11] BARRY, P. J. e GOLDMAN R. N.,  
”Factored Knot insertion ”
- [12] BARRY, P. J. e GOLDMAN R. N.,  
”Knot insertion algorithms ”
- [13] SCHIMMITT, F. J. M., BARSKY, B. A. e DU, W. H.,  
”An adaptive subdivision method for surface–fitting from sampled data“, *ACM –  
SIGGRAPH 86*, Dallas, volume 20, no.4, pp.179–188, Agosto, 1986.
- [14] FARIN, G.,  
*Curves and surfaces for Computer Aided Geometric Design – A Practical Guide*,  
Acadernic Press, Inc., San Diego, California, 1988.
- [15] SEDERBERG T. W. e PARRY S. R.,  
”Free–Form Deformation of solid models“, *ACM – SIGGRAPH 86*, Dallas, volume  
20, no.4, pp.151–160, Agosto, 1986.
- [16] JOE, B.,  
”Knot insertion for Beta–Spline curves and surfaces“, *ACM – Transactions on  
Graphics*, volume 9, no.1, pp.41-45, Janeiro, 1990.
- [17] FOLLEY, J. D. e VAN DAM, A.,  
*Fundamentals of Interactive Computer Graphics*, Addison Wesley Publishing  
Company, Inc., 1982.

- [18] NEWMAN, W. M. e SPROUL, R. F.,  
*Principles of Interactive Computer Graphics* , McGraw–Hill Inc., International edition,  
 segunda edição, 1979.
- [19] PERSIANO, R.C.M. e OLIVEIRA, A. F.,  
 Introdução à Computação Gráfica , Livros Técnicos e Científicos Editora, 1989.
- [20] PERSIANO, R.C.M.,  
 Modelagem Geométrica de Curvas e Superfícies – apostila, IX Congressoda SBC, VIII  
 Jornada de Atualização em Informática, 26 à 21 Junho, 1989.
- [21] FAUX, I. D. e PRATT, M. P.,  
 Computational Geometry for Design and Manufacture , Ellis Horwood (John Willey &  
 Sons), 1979.
- [22] ROGERS, D. F. e ADAMS, J. A.,  
 Mathematics Elements for Computer Graphics , McGraw–Hill, Inc., 1990.
- [23] ROGERS, D. F.,  
 Procedurals Elements for Computer Graphics , McGraw–Hill Inc., International edition,  
 1985.
- [24] DILL, J.,  
 "An aplicacion of color graphics to the display of surface curvature." ACM – Computer  
 Graphics , volume 15, pp 153–161, 1981.
- [25] ESPERANÇA, CLÁUDIO  
 Técnicas para visualização direta de modelos CSG, tese de mestrado – COPPE –  
 SISTEMAS – UFRJ, 1990.
- [26] MANTILÃ, M.,  
 An introduction to solid modeling, Computer Science Press, 1988
- [27] COHEN, E., LINCHE, T., RIESENFELD, R.,  
 "Discrete BSplines and subdivision techniques in Computer Aided Geometric Design  
 and Computer Graphics." , Computer Graphics and Image Processing , pp.87–111  
 número 14 , outubro, 1980.

- [28] DE BOOR, C.,  
*A practical guide to splines applied mathematical sciences*, volume 27,  
Springer–Velag, New York, 1978.
- [29] ROGERS, D. F., e SATTERFIELD, S. G.,  
"B–Spline surfaces for a ship hull design", *Computer Graphics (SIGGRAPH 80)*,  
volume 14, pp.221–217, 1980.
- [30] ROGERS, D. F., FOG, N.G.,  
"Constrained B–Spline curve and surface fitting", 1989.
- [31] SABLONIERE, P.  
"Spline and Bézier polygons associated with a polynomials spline curve", *Computer Aided Design*, Buttenthworth & Co (Publishers)Ltd, pp.257–261, volume 6, 1978.
- [32] BARSKY, B. A.,  
*Computer Graphics and Geometric Modeling using Beta–Spline*, Springer–Verlag,  
Berlin – Alemanha, 1988.
- [33] GOLDMAN, R.N.,  
"Blossoming and insertion algorithms for B–Splines curves", *Computer Aided Geometric Design* – North Holland, volume 7, pp.69–81, 1990.