

# MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO NA MODELAGEM DE TERRENO

**Luis Paulo Bueno**

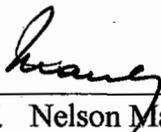
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

Aprovado por:

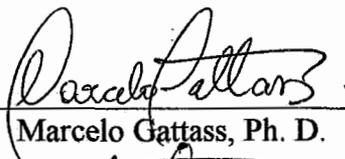


Prof. Ronaldo Cesar Marinho Persiano, D.Sc

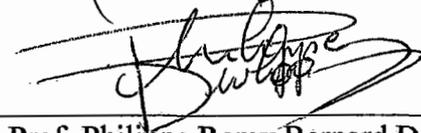
(Presidente)



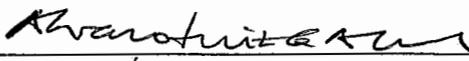
Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.



Prof. Marcelo Gattass, Ph. D.



Prof. Philippe Remy Bernard Devloo, Ph. D.



Prof. Álvaro Luiz G. A. Coutinho, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL  
março 1996

BUENO, LUIS PAULO

Minimização da Energia de deformação na Modelagem de Terreno.

[Rio de Janeiro] 1996

xi, 90p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1996)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

- |                 |                      |
|-----------------|----------------------|
| 1. Otimização   | 2. Triangulações     |
| 3. Convergência | 4. Elementos Finitos |

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO NA MODELAGEM DE TERRENO

Luis Paulo Bueno

Março de 1996

Orientador: Prof. Ronaldo Cesar Marinho Persiano

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

A criação de um modelo de terreno é abordada neste trabalho através da aproximação da solução de um problema de otimização com restrições pontuais. A função objetivo, interpretada como a energia de deformação de uma placa fina, envolve as derivadas de segunda ordem de uma função real definida no plano pertencente a um espaço conveniente. Formulamos um problema com restrições aproximadas e provamos que a solução ótima é o limite de duas sequências, a primeira convergindo na norma do espaço da solução e a segunda convergindo pontual e uniformemente. Os espaços que contêm as funções de ambas as sequências são obtidos através do Método de Elementos Finitos sobre triangulações. A primeira delas emprega elementos conformes e a outra elementos lineares. As triangulações utilizadas são escolhidas como triangulações CFK adaptativas. Uma estratégia de solução em duas etapas, expressando o ponto

central da proposta teórica, é apresentada. A primeira consiste na resolução de um problema de programação linear cuja solução é uma função viável. A segunda considera um problema de programação quadrática e a definição de um indicador para a escolha da solução aproximando a solução ótima.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirement for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## MINIMIZATION OF DEFORMATION ENERGY IN TERRAIN MODELING

Luis Paulo Bueno

March, 1996

Thesis Supervisor: Prof. Ronaldo Cesar Marinho Persiano

Department: Engenharia de Sistemas e Computação

The creation of a terrain model is approached in this work through the approximation of the solution of a optimization problem with pointwise constraints. The objective function, interpreted as a deformation energy of a thin plate, involves the second derivatives of a real function defined on the plane and belonging to a suitable space. We formulate a problem with approximate constraints and prove that the optimal solution is the limit of two sequences, the first one converging in the norm of the space to which the optimal solution belongs and the second converging pointwise and uniformly. The spaces which contain the functions of each sequence are constructed using the Finite Element Method over triangulations. The triangulations employed are chosen as CFK adaptative triangulations. A strategy of resolution in two steps, expressing the central point of the theoretical proposal, is presented. The first step involves the solution of a

linear programming problem and gives a feasible function. The second considers a quadratic programming problem and the definition of a indicator for the choice of the solution approximating the optimal solution.

## AGRADECIMENTOS

Ao Ronaldo Marinho, um amigo antes de orientador com quem sempre pude discutir quaisquer idéias de qualquer assunto e de quem pude receber o apoio que me empurrou para frente quando dificuldades de todas as ordens se me apresentaram. É um privilégio raro poder conhecer alguém com a sua inteligência e capacidade de trabalho, cujo contato é tão enriquecedor, pessoal e profissionalmente.

Ao Antônio de Oliveira por tudo que pude aprender e continuo aprendendo ao longo de nossos contatos. Uma amizade de longa data que foi resgatada.

Ao Paulo Roberto de Oliveira, irmão por amizade e afinidade, pelo apoio, incentivo e disponibilidade todo o tempo.

Ao Ricardo Dias Campos que nos aturou, enquanto estive no LCG, com as dúvidas e perguntas de iniciantes no “métier”. As festas na casa do Ricardo e as orgias gastronômicas da casa do Marcelo Salim foram atividades paralelas que deveriam ter entrado no histórico escolar.

Ao João Luiz Comba pela ajuda, idéias e “dicas” em vários momentos. Um amigo que ganhei.

À todos aqueles que, durante o longo tempo consumido por este doutorado, compartilharam e/ou compatilham o ambiente do LCG.

Ao Luiz Marcos que codificou as estruturas iniciais deste trabalho e à Carla Godinho pelo trabalho que facilitou captar aspectos do comportamento das triangulações.

Ao Antônio Apolinário pelo trabalho que vem desenvolvendo na implementação da proposta teórica e de exemplos. As avaliações dos resultados obtidos permitirão melhorar no futuro os critérios adotados. O interesse, dedicação e boa vontade têm sido de quem “vestiu a camisa” da proposta.

Ao Rolci Cipolati pela ajuda em algumas questões matemáticas surgidas neste trabalho.

Ao Projeto GEOTEC - Programa PROTEM do CNPq que financiou parte da realização deste trabalho de tese.

**À Carmem Beatriz,**  
amor que alegra e preenche a existência,  
companheira de todos os momentos  
e  
**à Renata, Flávia e Fernanda**  
que aprendi a amar como filhas.

## ÍNDICE

<u>CAPÍTULO 1</u>	<b>INTRODUÇÃO</b>	1
	DESCRIÇÃO SUMÁRIA DE TÉCNICAS	3
	UMA CONSULTA À LITERATURA	6
	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E DESCRIÇÃO DO TRABALHO	10
<u>CAPÍTULO 2</u>	<b>O PROBLEMA MATEMÁTICO</b>	12
	MOTIVAÇÃO	13
	A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA	16
	O CONJUNTO AMOSTRAL E O CONJUNTO DE RESTRIÇÕES	16
	CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO	17
	O ESPAÇO ADMISSÍVEL E OS ESPAÇOS DE SOBOLEV	18
	O FUNCIONAL DE ENERGIA	20
	OS PROBLEMAS APROXIMADOS E SUAS SOLUÇÕES	24
	CONCLUSÕES	34
<u>CAPÍTULO 3</u>	<b>O MEF E AS MALHAS ADAPTATIVAS</b>	35
	O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	35
	ALGUNS EXEMPLOS DE ELEMENTOS CONFORMES	38
	TRIANGULAÇÕES	46
	REFINAMENTOS	48
	TRIANGULAÇÕES CFK ADAPTATIVAS	49
	A ESTRUTURA DE ADJACÊNCIAS	52
	AS OPERAÇÕES DE REFINAMENTO E ALTERAÇÃO DE UMA TRIANGULAÇÃO	55
	CONCLUSÕES	62
<u>CAPÍTULO 4</u>	<b>ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO</b>	63
	DIFICULDADES NA OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO	63
	APROXIMANDO AS SOLUÇÕES AO $P_m$	69
	O PROBLEMA MISTO: ANÁLISE DE CONVERGÊNCIAS	71
	EXISTÊNCIA E UNICIDADE	72
	CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES	73
	ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO	77

AS ETAPAS.....	79
CONCLUSÕES.....	83
<u>CAPÍTULO 5</u> <b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>85</b>
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	88

## CAPÍTULO 1      INTRODUÇÃO

---

A necessidade de estabelecer enlaces de micro-ondas em uma certa região requer, entre outras coisas, o conhecimento da sua topografia, usualmente codificado em um *modelo de terreno*. Um tal modelo deverá permitir otimizar o cálculo do enlace, não apenas nos itens relativos à propagação de ondas e sua interação com a forma do relevo, mas também no posicionamento e na altura das torres de emissão e recepção. Estes dois últimos itens têm uma repercussão direta e significativa no custo econômico do enlace.

Vários são os processos empregados na captura dos dados que alimentam a construção de um tal modelo. Podemos citar alguns exemplos: medidas de campo, digitalização de curvas de nível em mapas de relevo, fotografias aéreas e de satélites. O conjunto de dados consiste minimamente de um conjunto de *posições* de uma região de interesse da superfície da Terra e de um conjunto de *cotas*, associadas às posições, relativas a um certo nível de referência. A região é suposta de um tamanho tal que possa ser considerada plana e as posições estão nela espalhadas. Além destas, as medidas de outras grandezas podem ainda ser atribuídas às posições.

As imprecisões, intrinsecamente associadas a essas informações, sugerem a atribuição de um intervalo de tolerância dentro do qual cada medida, como a de uma cota, deve estar. Os critérios de definição destes valores de tolerância dependerão da aplicação usuária do modelo de terreno. Chamaremos de *conjunto amostral* o conjunto de dados (posições, cotas, tolerâncias, etc.) que devem estar disponíveis ao modelador de terreno.

A cardinalidade necessariamente finita de qualquer conjunto amostral, ainda que um número bastante grande, caracteriza um conjunto *esparso* de informações: um conjunto de “ilhas” de conhecimento, em geral impreciso, circundado por

“oceanos” de ignorância. O objetivo de geração computacional de um modelo de terreno impõe uma formulação do problema de modelagem na qual a busca da solução dependa de um número finito de parâmetros, preferencialmente bem menor que o número de dados. Além disso um modelador deve gerar modelos que aproximem o melhor possível a topografia real e atendam aos requisitos impostos pela aplicação que os utilizará.

Um terreno real não pode ser considerado como uma forma geométrica que apresenta variações suaves, mas uma mistura de retalhos distintamente suaves separados por linhas de transição. Dependendo da aplicação, pode ser imposta a exigência da criação de um modelo suave, que será tanto mais confiável quanto melhor for a qualidade do conjunto amostral e do modelador. A questão é então saber se a suavidade representa a realidade. Qualquer que seja o caso, uma forma geométrica representando um terreno será percebida, de forma intuitiva, como uma superfície bidimensional, pelo menos contínua. Este critério mínimo deve ser atendido mesmo se o terreno é representado como uma colagem de retalhos.

De um ponto de vista geométrico, a criação de um modelo de terreno, o nosso problema de interesse, consiste na resolução do problema de reconstrução de uma superfície: geração computacionalmente eficiente de sua representação, que incorpore os dados esparsos do conjunto amostral, preencha as “lacunas” de maneira consistente e atenda aos requisitos definidos pela aplicação.

A informação esparsa não impõe, em geral, restrições suficientes sobre a forma da superfície que ela deve gerar. Em consequência não podemos inferir as suas propriedades geométricas na região de interesse. Para permitir que uma única representação completa da superfície possa ser computada são necessárias hipóteses adicionais para restringir suficientemente a superfície. Em princípio, a hipótese de *suavidade* pode fornecer uma restrição adicional que permite a reconstrução desejada, à partir da informação disponível e dos requisitos da aplicação.

Este trabalho tem como objetivo estabelecer heurísticas de modelagem de terreno que permitam a construção de uma superfície com um certo grau de

suavidade, que melhor aproxime a topografia real e satisfaça aos valores de tolerância impostos.

## DESCRIÇÃO SUMÁRIA DE TÉCNICAS

A construção de um modelo de terreno, envolvendo como informações mínimas, um conjunto de posições e as cotas associadas, necessita essencialmente definir dois processos: um de manipulação das posições e um outro de construção de uma superfície que incorpore, de alguma forma, o conhecimento das cotas do terreno, como ocorre usualmente com os modelos utilizados em análises topográficas. Nestes casos, tradicionalmente, tornou-se um requisito fundamental “ honrar ” as informações do conjunto amostral no sentido de incorporá-las “ integralmente ”. A tradução formal desta idéia encontra uma expressão natural em um processo de *interpolação* das cotas.

Para que obtenhamos uma tal superfície é preciso definir alguns ingredientes básicos. O primeiro é definir um processo de organização lógica das posições, em princípio aleatoriamente distribuídas. O segundo é definir, na região de interesse do plano, que tipo de superfície assumirá, nas posições amostrais, os valores das cotas e será capaz de representar pontos e linhas características do relevo. Este último ingrediente se traduz na definição do tipo de função que admite como gráfico, no espaço tridimensional, a superfície bidimensional procurada. As escolhas associadas às definições dos dois ingredientes caracterizam grandes famílias de modeladores já construídos.

Uma primeira organização lógica possível das posições amostrais decorre da utilização de um processo de triangulação, como o devido à Delaunay e conhecido de longa data. As posições tornam-se então vértices de triangulos que no seu conjunto determinam uma decomposição da região de interesse do plano em células triangulares. É gerada assim uma malha irregular refletindo a distribuição das posições e não o espectro que o conjunto das cotas apresenta. Estas cotas deverão ser interpoladas por funções cujos domínios são as células definidas. Dependendo do tipo de interpolador escolhido e de outros requisitos do

modelo buscado, serão necessárias algumas condições adicionais para que a superfície gerada tenha um determinado atributo geométrico.

No passado, uma primeira dificuldade, encontrada com esta forma de organização lógica, residia no custo computacional expresso pela noção de complexidade da construção dessa triangulação. Com a obtenção de algoritmos com complexidade ótima a desvantagem foi superada.

Uma proposta alternativa define na região de interesse, entendida como um retângulo, uma malha regular dando origem a um conjunto de células retangulares. Podemos ainda subdividir cada um destes retângulos, usando uma ou ambas as suas diagonais, obtendo uma triangulação regular. Esta construção acarreta a partição do conjunto de posições em subconjuntos disjuntos (uma posição na fronteira de duas células será associada a apenas uma delas). A organização lógica das posições fica assim baseada na decomposição da região e não mais na distribuição daquelas.

A geometria associada ganha em simplicidade e regularidade mas o processo de interpolação passará a utilizar pontos do plano, não mais associados às posições amostrais, mas agora a nós da decomposição (pontos de interseção das retas que definem a malha). Os valores das cotas a serem interpolados, nesses pontos, deverão ser estimados por algum processo. Frequentemente emprega-se alguma forma de ponderação de valores em posições vizinhas aos nós, tendo sido estabelecido um critério de seleção destas posições.

A escolha da malha regular, isto é, com o espaçamento uniforme das linhas que a definem, deve permitir a construção de um interpolador capaz de representar variações não monótonas das cotas, as “ rugosidades ” do terreno. Para que isto ocorra, a complexidade da malha pode ser muito grande, da mesma ordem de grandeza do número de posições amostrais, em consequência do caráter global do processo de sua construção. Esta deverá criar desnecessariamente muitas células nas regiões onde as cotas variam pouco ou variam linearmente. Isto decorre do processo de decomposição da região obedecer a uma lógica que não leva em conta

a distribuição dos valores das cotas. Em consequência o esquema de modelagem pode deixar de reconhecer as linhas e os pontos característicos do terreno.

A escolha da função interpoladora é crítica, qualquer que seja o modelador. A maioria das funções não está relacionada à geometria do terreno que estão tentando modelar. Uma exceção é dada pela modelagem de anomalias gravitacionais para as quais existe uma base teórica levando ao uso de funções dependendo do inverso do quadrado da distância. Em consequência é importante considerar cuidadosamente o tipo de função usada.

Adotando um critério de simplicidade considera-se frequentemente interpoladores lineares, o que permite gerar uma superfície poligonal representando o terreno. Outros tipos de interpoladores também podem ser empregados e existe uma literatura extensa relativa a métodos de interpolação de valores em posições dadas formando um conjunto esparso [McCU88]. Isto indica que dificilmente há uma técnica ótima e que a escolha do método depende muito da preferência do usuário e das características desejadas para a superfície a ser produzida. De uma função interpoladora exige-se, em geral, que: (1) forneça uma superfície contínua, pelo menos visualmente suave, o que equivale à exigência de continuidade de sua 1ª derivada; (2) seja fácil de calcular; (3) tenha as propriedades matemáticas de interesse para a aplicação.

Requisitos de suavidade impostos à superfície podem ser atendidos se forem usadas funções polinomiais de grau crescente, uma em cada triângulo ou uma colagem de partes polinomiais definidas em subtriângulos, e impostas condições adequadas, como por exemplo a exigência de continuidade das derivadas de primeira ordem através das arestas de interface entre dois triângulos no primeiro exemplo e, além disso, também nas internas no segundo.

Estas condições envolverão informações que ou já estão incorporadas ao conjunto amostral ou devem ser estimadas à partir dos dados disponíveis. A construção de uma tal superfície mais complexa pode dar origem a problemas, em consequência da geometria irregular das células, como no caso da triangulação de

Delaunay. A sua forma arbitrária pode representar uma fonte adicional de erros nos cálculos levando à determinação da superfície.

Além da independência entre a construção da malha e a distribuição das cotas, discutida anteriormente, observamos que as famílias de modeladores mencionadas repousam essencialmente na noção de interpolação, o que determina um tipo bem definido de problema matemático a ser resolvido para se obter a superfície procurada. Por outro lado, a geometria das células é de crucial importância para a definição de funções que as admitem como domínio.

Em consequência da discussão anterior concluímos que esses modeladores tendem a ser complexos e, além disso, podem produzir superfícies, representando o terreno, que são “rugosas” onde isto é indesejável ou “lisas” onde o terreno é acidentado.

## UMA CONSULTA À LITERATURA

Em [DIER92] os autores pretendem ajustar uma função, definida em um domínio limitado do plano, com derivada primeira contínua, a um conjunto amostral esparsos, composto unicamente de posições e cotas. Supondo que os valores das cotas estão sujeitos a erros, busca-se então uma função que aproxime-as ao invés de interpolá-las. Exige-se ainda que estas funções dependam de um número finito de parâmetros significativamente menor que o número de dados amostrais. Além do objetivo de obter a melhor aproximação deseja-se que isto seja alcançado por uma função suave. Naturalmente é preciso definir critérios, que traduzam tanto uma medida da proximidade quanto uma medida da suavidade, a serem incorporados ao processo de solução.

Antes da caracterização de tais critérios é preciso apresentar alguns ingredientes utilizados na sua proposta. A organização lógica das posições emprega uma triangulação inicial da região de interesse e uma estratégia de refinamentos adaptativos definida em [RIVA91] e através da qual temos a geração de triângulos bem formados no sentido de terem ângulos e lados sempre superiores a valores fixos e apresentarem ainda a propriedade de permitirem transições de

tamanho suaves ao se percorrer uma sequência de triângulos adjacentes por aresta indo de um pequeno para um grande. O espaço de funções onde a solução será procurada é escolhido como um espaço de funções spline de Powell-Sabin, definido como um conjunto de retalhos construídos sobre cada triângulo através da escolha de um ponto interno a cada triângulo, a decomposição deste em seis subtriângulos tendo o ponto interior como vértice e a definição de uma quadrática sobre cada um destes. Assim, se  $\Delta$  é uma triangulação da região de interesse a construção dos retalhos exige um refinamento associado que podemos chamar  $\Delta^*$ . O espaço das funções candidatas passa a ser então  $S_2^1(\Delta^*, \Omega)$  o espaço das splines polinomiais de grau 2 e de grau de continuidade 1 definidas na triangulação  $\Delta^*$  da região de interesse  $\Omega$ . A escolha se deveu aos argumentos: (1) estas funções podem ser definidas sobre qualquer triangulação; (2) sendo quadráticas de classe  $C^1$  elas apresentam um grau algébrico e um grau de continuidade adequados para os critérios de proximidade e suavidade, além de simplificar os cálculos; (3) uma base de suporte local pode ser construída de forma simples; (4) a dimensão do espaço admite uma expressão igualmente simples: se  $N$  é o número de dados amostrais a dimensão será  $3N$ . Completa o conjunto de ingredientes a adoção da representação Bézier para tais funções que, além de permitir maior estabilidade numérica aos cálculos a serem realizados, é a representação familiar e mais adequada em um contexto de modelagem geométrica.

A definição do critério de proximidade procura minimizar a diferença entre o valor da função e o da cota em cada posição do domínio plano, levando em conta a sua distribuição e portanto envolve o uso de Mínimos Quadrados Ponderados, os pesos estando ligados a parâmetros da distribuição estatística dos dados do conjunto amostral. O critério de suavidade leva em conta que as derivadas segundas das funções do espaço escolhido são descontínuas sobre as arestas da triangulação e emprega como idéia básica a minimização das descontinuidades destas derivadas segundas. O critério de proximidade tem precedência sobre o de suavidade.

Em [WEYR92] o autor quer aproximar uma função desconhecida, com suavidade adequada em uma região do plano conhecendo um conjunto amostral composto de posições, cotas e erros nas medidas destas. Os erros apresentam uma distribuição estatística com média nula e variância desconhecida. A organização lógica das posições é feita por uma triangulação regular do domínio, suposto um retângulo, através de uma decomposição inicial em retângulos seguida de uma divisão destes pela diagonal de coeficiente angular positivo. O espaço de funções empregado é o espaço de splines  $S_3^1(\Delta_{nx, ny}, \Omega)$  onde a triangulação  $\Delta_{nx, ny}$  contém  $nx$  quadrados ao longo do eixo  $x$  e  $ny$  ao longo do eixo  $y$  e a diagonal “positiva” e  $\Omega$  é a região do plano: os retalhos são de grau algébrico 3, emendam-se com continuidade de grau 1 e apresentam um suporte pequeno. O critério de proximidade é codificado através de uma expressão do quadrado da diferença entre o valor da função e o da cota em cada posição do domínio plano. O de suavidade é codificado por uma expressão envolvendo curvaturas média e gaussiana. Ambos aparecem na função objetivo de um problema de minimização envolvendo penalidades. A penalidade, associada à noção de suavidade, envolve uma expressão envolvendo os quadrados das derivadas de segunda ordem da função. A função objetivo escolhida é

$$J(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\varphi(q_i) - z_i]^2 + \lambda \int_{\Omega} [\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + 2\varphi_{xy}^2] da$$

onde  $N$  é o número de pontos amostrais,  $\varphi$  uma função de  $S_3^1(\Delta_{nx, ny}, \Omega)$  e  $\lambda > 0$  é um parâmetro de suavização fixado e deve ser tal que se  $\lambda \rightarrow \infty$  a solução tende para um polinômio linear em  $\Omega$  e se  $\lambda \rightarrow 0^+$  a solução tende para uma spline.

Em [TERZ86] e [TERZ89] são discutidos problemas de reconstrução nos quais são buscadas representações geométricas explícitas do mundo tridimensional à partir de imagens 2D. Observa-se que problemas de reconstrução visual tendem a ser mal condicionados no sentido que existência, unicidade e estabilidade das soluções não podem ser garantidas na ausência de restrições adicionais. A discussão do problema clássico de regularização, que em uma forma bem básica se

apresenta como a suavização espacial à fim de suprimir ruídos de alta frequência, permite a reformulação de problemas de reconstrução de problemas visuais mal condicionados como princípios variacionais (a regularização se apresenta associada ao nosso problema de modelagem se queremos eliminar rugosidades indesejáveis no nosso terreno). Nestes trabalhos a introdução de certas classes de funcionais generalizados enfatiza a correspondência entre o problema de regularização e o da aproximação ótima através de splines multidimensionais. O caso bidimensional relaciona-se diretamente ao problema de ajustar superfícies a dados esparsos.

A regularização parece oferecer uma base teórica para as restrições de suavidade que têm sido impostas aos problemas de reconstrução visual onde as discontinuidades desempenham um papel importante e representam dificuldades a serem superadas.

Além de fornecer uma formulação matemática para tratar problemas de reconstrução, dos quais um exemplo é o problema de modelagem, e que generaliza aquela apresentada em [WEYR92], os trabalhos mencionados levantam algumas dificuldades. Sugerem ainda a utilização de esquemas de aproximação usando um enfoque local através do Método de Elementos Finitos - MEF.

Um outro aspecto relevante presente nesses dois trabalhos é o uso de uma interpretação do formalismo desenvolvido através de modelos físicos, uma linha de trabalho para a qual este autor muito tem contribuído e que passou a ser conhecida como Modelagem Baseada em Física. O oferecimento de interpretações alternativas, por exemplo, analítica, geométrica e física, é uma estratégia geral e poderosa para esclarecer a caracterização de um problema, sugerir abordagens e favorecer o surgimento de “insights” para a obtenção de sua solução. Neste sentido podemos extrair desses trabalhos a idéia de relacionar o uso de restrições de suavidade, tradicionalmente expressões úteis de informação genérica, *à priori*, sobre soluções possíveis, à noção de curvatura de uma superfície e aos modelos de elasticidade com coeficiente de Poisson nulo. Este contexto interpretativo nos remete naturalmente às ferramentas matemáticas fundamentando a obtenção das

soluções desenvolvidas pela Física e pela Engenharia, das quais o MEF é o exemplo mais significativo.

Os trabalhos discutidos apresentam alguns dos ingredientes que iremos utilizar na nossa proposta de modelagem de terreno. A utilização de refinamentos adaptativos da triangulação que geram triângulos com boa forma, sem tendências à degenerescência, e com transições suaves de tamanho podem levar a algoritmos numéricos mais estáveis e à redução da complexidade da triangulação repercutindo no custo computacional. A criação de uma base teórica para construção de modelos buscando aproximar ao invés de interpolar valores amostrais fornece uma justificativa para as noções de grau de aproximação e grau de suavidade. O uso de ferramentas matemáticas permitindo uma interpretação em termos de modelos de elasticidade oferece um recurso poderoso de visualização e analogia.

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E DESCRIÇÃO DO TRABALHO

O nosso problema de modelagem será formulado dentro de um enfoque de aproximação dos valores amostrais. A noção de suavidade da superfície procurada estará associada à exigências sobre a curvatura.

Vamos considerar um problema de otimização com restrições pontuais definidas por inequações envolvendo as tolerâncias impostas pela aplicação. A função objetivo do problema  $J(\cdot)$  será uma combinação linear de curvaturas média e gaussiana de uma superfície descrita por  $\varphi$ . Ela permitirá uma interpretação como a energia  $J(\varphi)$  da configuração de uma placa fina de forma retangular, presa aos vértices da região retangular de interesse por molas. A placa terá que se acomodar para atingir a configuração de equilíbrio, de energia mínima, dentro das “folgas” caracterizadas pelas tolerâncias.

No capítulo 2 será apresentada a motivação e serão definidos os ingredientes do problema levando à sua formulação matemática. Em seguida serão caracterizadas a existência e unicidade da sua solução. A aproximação desta solução ótima será buscada através de uma sequência de soluções de problemas

análogos. Estes são formulados em espaços de dimensão finita admitindo cada um deles uma única solução que deverá convergir para aquela solução ótima como mostraremos.

No capítulo 3 veremos como o MEF será usado como técnica de resolução desses problemas. Serão usadas malhas adaptativas visando reduzir a complexidade da triangulação e melhor acomodar as variações das cotas amostrais. Empregaremos uma triangulação CFK de partida composta de triângulos retângulos isósceles e o processo de refinamento de Rivara o que garante uma descendência de triângulos da mesma forma. Alguns exemplos de elementos relevantes para a nossa construção serão apresentados. Além de exemplos de elementos conformes, como Bell-Akima e Clough-Tocher, os elementos lagrangeanos, em particular os lineares, serão lembrados.

O capítulo 4 contém a parte mais relevante do trabalho. Vamos considerar o uso de uma formulação mista na qual a energia é calculada através de elementos conformes e as restrições serão satisfeitas de forma aproximada com o uso de elementos lineares. O problema formulado permite caracterizar a convergência de duas seqüências de funções, uma na norma do espaço e a outra uma convergência pontual uniforme. O limite de ambas caracteriza a solução ótima. Estratégias de obtenção de uma solução viável e de obtenção da solução de melhor aproximação da solução ótima serão discutidas.

O capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho e propostas de trabalhos futuros.

---

O problema que estamos interessados em resolver pode ser inicialmente descrito como: “ Considere uma região da superfície da Terra e um conjunto finito de dados a ela associados. O conjunto é composto de valores de posições, cotas e tolerâncias correspondentes. Queremos determinar uma superfície, com suavidade adequada, que nas posições esteja próxima dos valores das cotas correspondentes, no sentido de não ultrapassar as tolerâncias impostas”. Vamos apresentar uma formulação matemática para este problema, etapa essencial na construção computacional de um modelo de terreno.

A superfície será representada pelo gráfico de uma função real definida no plano e entendida como a imagem, pelo menos homeomorfa, da região  $D$  do plano, no interior da qual os dados foram coletados. Ela não necessita satisfazer a nenhuma restrição nos pontos da fronteira da região. O requisito essencial é a satisfação de restrições *pontuais*, expressas pelos intervalos de valores das cotas que as tolerâncias estabelecem. A noção de suavidade adequada será caracterizada por um critério envolvendo a sua curvatura.

Tendo como motivação o problema clássico de interpolação de um conjunto finito de valores reais dados em uma região da reta ou do plano, vamos definir um problema de otimização com restrições envolvendo desigualdades. Adotaremos como critério de otimização uma combinação linear das curvaturas média e gaussiana. O espaço das funções onde a solução deve ser buscada é caracterizado como o espaço de Sobolev  $H^2(D)$ . A interpretação do critério de otimização como a energia de deformação de um meio elástico facilita a constatação de não unicidade da solução do

problema definido. Redefinimos então o critério que torna-se o quadrado de uma norma topologicamente equivalente à norma usual de  $\mathbf{H}^2$ . Caracterizado o conjunto de restrições o problema, que passamos a chamar de problema *contínuo*, fica bem definido.

O interesse em uma solução dependendo de um número finito de parâmetros sugere a aplicação do método de Ritz-Galerkin. Um problema análogo definido em um subespaço de dimensão finita de  $\mathbf{H}^2$  será chamado de problema *discreto*. Garantimos a existência e unicidade da solução de ambos os problemas. Uma aproximação adequada da solução do problema contínuo poderá ser obtida através de uma sequência de soluções de problemas discretos que provamos ser convergente para a solução do contínuo.

## MOTIVAÇÃO

O problema clássico de interpolação por funções spline, em uma dimensão, fornece um primeiro exemplo da abordagem que empregaremos. Ele possibilitará a introdução de propriedades matemáticas que levarão à formalização da noção intuitiva de “grau de suavidade”.

O problema (P0) se escreve na forma.

**Min  $J(\mathbf{v})$**

*sujeito a  $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$*

onde  $\mathbf{U} = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{c}_i \}$ ,  $\mathbf{V}$  é um espaço adequado de funções de  $\mathbf{R}^1$  em  $\mathbf{R}^1$ ,  $\mathbf{x}_i$  um ponto da reta e  $\mathbf{c}_i$  um valor real para cada  $i$ .

(P0) é um problema de otimização com restrições lineares. Escolhendo a função objetivo  $\mathbf{J}(\cdot)$  como o funcional quadrático definido em  $\mathbf{V}$  por

$$v \in V \rightarrow J(v) = \int_a^b \left| \frac{d^m v}{dx^m} \right|^2 dx$$

o valor particular atribuído a  $m$  determina a ordem de continuidade das soluções ou o seu grau de suavidade, que aumenta com  $m$  [TERZ89].

Escolhendo os pontos  $x_i$  em um intervalo  $[a, b]$  podemos procurar uma solução do problema se  $V$  for o espaço das funções spline polinomiais.  $V$  será notado  $S_p^q(\Delta, [a, b])$ , onde  $\Delta = \{ [x_1, x_2], \dots, [x_{N-1}, x_N] \}$  é uma decomposição em intervalos da reta,  $p$  expressa o grau dos polinômios definidos em cada intervalo e  $q$  o grau de continuidade da função  $v$  nos pontos  $x_i$ .

Para certos valores de  $m$  o problema admite interpretações familiares no contexto da teoria da elasticidade. As equações que governam estes modelos físicos são mais frequentemente expressas, na forma diferencial, através das equações de Euler-Lagrange, como são usualmente conhecidas do cálculo variacional clássico, e expressam as condições necessárias para a existência de um mínimo para o funcional  $J$ .

No caso  $m = 1$  temos

$$J(v) = |v|_1^2 = \int_a^b v_x^2 dx$$

e o funcional pode ser interpretado com a energia potencial elástica de um fio ideal e dá origem a uma solução  $C^0$ .

A continuidade de 1ª ordem pode ser imposta escolhendo-se  $m = 2$  e, neste caso,

$$J(v) = |v|_2^2 = \int_a^b v_{xx}^2 dx$$

caracteriza a energia potencial de deformação de uma barra fina.

Tais funcionais podem ser estendidos de forma natural a duas dimensões e assim podemos pensar em empregá-los no problema de reconstrução de uma superfície. Nesta extensão bidimensional os análogos do fio e da barra fina são, respectivamente, a membrana e a **placa fina**. Não é difícil visualizar as propriedades distintivas das superfícies geradas em cada caso, como por exemplo quando ambas são fixadas nas suas bordas (fronteira) e defletidas verticalmente por forças pontuais aplicadas.

A membrana forma superfícies que apresentam as primeiras derivadas descontínuas nos pontos de aplicação ao contrário das placas. As superfícies geradas no caso da placa fina parecem apresentar o grau de suavidade que consideramos apropriado enquanto as superfícies geradas por um meio elástico mais rígido ( $m > 2$ ) parecem ser excessivamente suaves.

A superfície que estamos procurando pode então ser visualizada, por exemplo, em um contexto mecânico, como uma placa suficientemente fina construída de algum material elástico e “moldada” de tal forma que, em cada ponto dado, respeite a “folga” que o intervalo de tolerância correspondente define.

Como **proposta do trabalho**, o problema de modelagem que iremos resolver será o **problema da placa fina** sujeita às restrições impostas por um conjunto finito de valores amostrais. Ele é abstratamente formulado por

$$\text{Min } J(\mathbf{v})$$

$$\text{sujeito a } \mathbf{v} \in U$$

onde  $U \subset V$  é o nosso conjunto de restrições,  $V$  um espaço vetorial conveniente e  $J: V \rightarrow \mathbf{R}$  a função objetivo que precisamos determinar.

A solução, através do seu gráfico, deverá fornecer uma superfície **suave** no sentido de apresentar uma **curvatura mínima** sobre a região de interesse. A superfície

que modela o terreno, por este critério, não deverá apresentar rugosidades indesejáveis ou variações não observadas nos dados amostrais que a restringe.

## A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### O CONJUNTO AMOSTRAL E O CONJUNTO DE RESTRIÇÕES

Seja  $D \subset \mathbf{R}^2$  um retângulo, a nossa *região de interesse*. Seja  $Q^4 = \{ (q_i, z_i, \varepsilon_i) \in D \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+; i = 1, \dots, N \}$  o *conjunto amostral* onde cada  $q_i \in \mathbf{R}^2$  é chamado uma *posição*,  $z_i$  a *cota* associada à posição  $q_i$  e  $\varepsilon_i \geq 0$  uma *tolerância* associada à medida da cota  $z_i$  determinada pela aplicação,  $i = 1, \dots, N$ . Vamos também considerar o conjunto de posições no terreno representado por  $Q^2 = \{ q_i \equiv (x_i, y_i) \in \mathbf{R}^2; i = 1, \dots, N \}$ .

O conjunto amostral é fornecido por algum processo de medida. A aplicação, levando em conta a imprecisão sempre associada a tal processo, define estas tolerâncias, possivelmente nulas, e os requisitos a serem satisfeitos pelo modelo a ser gerado.

As tolerâncias permitem caracterizar o conjunto de *restrições* que devem ser satisfeitas por qualquer função  $\varphi : D \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\varphi \in V$  candidata a resolver o problema. Estas restrições, lineares sobre  $\varphi$ , serão definidas por

$$| \varphi(q_i) - z_i | \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$$

ou equivalentemente por

$$\varphi(q_i) - z_i - \varepsilon_i \leq 0,$$

$$\varphi(q_i) - z_i + \varepsilon_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

$$\text{Definindo } \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T \in \mathbf{R}^N$$

o conjunto de restrições será descrito por

$$U = \{ \varphi \in V \mid \varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{z} - \boldsymbol{\varepsilon} \leq \mathbf{0}, \varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon} \geq \mathbf{0} \}$$

## O CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO

Considere a superfície bidimensional em  $\mathbf{R}^3$ , gráfico de uma função  $\varphi : \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ . Se  $\varphi_{ab} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$  são as derivadas parciais de segunda ordem,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \{(\mathbf{x}, \mathbf{x}), (\mathbf{y}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$ , então  $\Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$  é o Laplaciano de  $\varphi$ .

Podemos descrever a sua *curvatura média* por  $\sigma_M = (1/2) (\Delta \varphi)^2$  e a sua *curvatura gaussiana* por  $\sigma_G = \varphi_{xx} \varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2$  em uma vizinhança de área  $da$  de um ponto arbitrário  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{D}$ .

A função objetivo será definida como uma combinação linear das curvaturas média e gaussiana da função  $\varphi$  por

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\varphi) &= \int_{\mathbf{D}} [c_1 \sigma_M + c_2 \sigma_G] \\ &= \int_{\mathbf{D}} [c_1 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})^2 + c_2 (\varphi_{xx} \varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)] \\ &= \int_{\mathbf{D}} [c_1 \varphi_{xx}^2 + c_1 \varphi_{yy}^2 + (2c_1 + c_2) \varphi_{xx} \varphi_{yy} - c_2 \varphi_{xy}^2] \end{aligned}$$

A escolha dos valores dos coeficientes como  $c_1 = 1$  e  $c_2 = -2$  permitirá escrever

$$\mathbf{J}(\varphi) = \int_{\mathbf{D}} [\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + 2\varphi_{xy}^2]$$

A expressão de  $\mathbf{J}$  é invariante por uma mudança de coordenadas ortogonais do plano e admite uma interpretação como a energia potencial elástica da placa fina (desprezada a gravidade) no caso em que o coeficiente de Poisson da teoria da elasticidade tem valor nulo.

O problema abstrato assume então a forma

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \int_{\mathbf{D}} [ \varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + 2 \varphi_{xy}^2 ] \\ \text{sujeito a} \quad & \varphi(\mathbf{q}) - z - \varepsilon \leq 0 \\ & \varphi(\mathbf{q}) - z + \varepsilon \geq 0 \\ & \varphi \in \mathbf{V} \end{aligned}$$

## O ESPAÇO ADMISSÍVEL E OS ESPAÇOS DE SOBOLEV

A identificação do espaço de funções  $\mathbf{V}$  onde deverá ser procurada a função  $\varphi$  leva à definição do que chamaremos *espaço admissível* para as soluções do nosso problema.

As ferramentas do cálculo variacional clássico permitem formular o problema, na sua versão dita *forte*, através das equações de Euler-Lagrange. No nosso caso obtemos uma equação a derivadas parciais de quarta ordem, a chamada equação biharmônica. Não estaremos impondo nenhuma condição de contorno sobre a solução e, em consequência, *a superfície procurada estará inteiramente livre sobre os pontos da fronteira do domínio  $\mathbf{D}$* . Nesta formulação forte o espaço admissível deverá ser, pelo menos, um subconjunto de  $\mathbf{C}^4(\mathbf{D})$ , espaço das funções  $\varphi$  com derivadas parciais contínuas até quarta ordem.

Ao invés disso podemos adotar a formulação *fraca* do problema, na qual  $\varphi$  deve pertencer a um conjunto mais abrangente de funções. Nesta formulação exigimos apenas que as derivadas parciais de segunda ordem sejam integráveis em  $\mathbf{D}$ . Neste caso somos levados, de uma forma natural, a considerar os **espaços de Sobolev** como candidatos ao rótulo de espaço admissível  $\mathbf{V}$ .

Os espaços de Sobolev podem ser caracterizados por alguns resultados que se seguem. Inicialmente considere o espaço das funções de quadrado integrável em  $\mathbf{D}$ ,

isto é, o espaço vetorial das funções  $\varphi: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  tais que  $\int_{\mathbf{D}} |\varphi(\mathbf{x})|^2 < \infty$ , usualmente notado por  $L_2(\mathbf{D})$ . A função real  $\|\cdot\|_{0,\mathbf{D}}: L_2(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $\|\varphi\|_{0,\mathbf{D}} = \left\{ \int_{\mathbf{D}} |\varphi(\mathbf{x})|^2 \right\}^{1/2}$  é uma norma em  $L_2(\mathbf{D})$ .

Se usarmos a notação  $\mathbf{D}^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} \varphi}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$ , onde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  é um par de números inteiros não negativos e  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$  o espaço vetorial das funções  $\varphi: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$  tais que  $\mathbf{D}^\alpha \varphi \in L_2(\mathbf{D})$ ,  $\forall \alpha$  com  $|\alpha| \leq m$  é chamado espaço de Sobolev de ordem  $m \geq 0$ ,  $m$  inteiro, e será notado  $\mathbf{H}^m(\mathbf{D})$ .

$\mathbf{H}^m(\mathbf{D})$  torna-se um espaço normado com a norma  $\|\cdot\|_{m,\mathbf{D}}: \mathbf{H}^m(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\|\varphi\|_{m,\mathbf{D}} = \left\{ \int_{\mathbf{D}} \sum_{|\alpha| \leq m} |\mathbf{D}^\alpha \varphi|^2 \right\}^{1/2}$ . Naturalmente  $\mathbf{H}^0(\mathbf{D})$  coincide com  $L_2(\mathbf{D})$ . A

função  $\|\cdot\|_{2,\mathbf{D}}: \mathbf{H}^2(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por  $\|\varphi\|_{2,\mathbf{D}} = \left\{ \int_{\mathbf{D}} [\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + \varphi_{xy}^2] da \right\}^{1/2}$  é uma semi-norma em  $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$ .

Algumas propriedades adicionais, relevantes para o nosso problema, podem ainda ser apresentadas. Em primeiro lugar, pode-se provar que  $\mathbf{H}^m(\mathbf{D})$  é um espaço vetorial completo com a norma  $\|\cdot\|_{m,\mathbf{D}}$ ,  $m \geq 0$ . Por outro lado, se  $m_2 > m_1 \geq 0$  então  $\mathbf{H}^{m_1}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{H}^{m_2}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{H}^0(\mathbf{D}) \equiv L_2(\mathbf{D})$ .

Os espaços de Sobolev  $\mathbf{H}^m(\mathbf{D})$  são separáveis (aditem um subconjunto denso enumerável) e, em consequência, existe uma sequência encaixada de subespaços de dimensão finita  $(\mathbf{V}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ,  $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{V}_n \subset \mathbf{V}_{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$  e tal que  $(\cup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{V}_n)^- = \mathbf{V}$ , isto é, o seu fecho é o espaço  $\mathbf{V}$ .

Para o retângulo  $\mathbf{D}$  o espaço  $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$  admite uma imersão (compacta) em um subespaço de  $\mathbf{C}^0(\mathbf{D})$ :  $\mathbf{C}^0(\mathbf{D}) \subset \mathbf{H}^2(\mathbf{D}) \subset \mathbf{C}^0_{\mathbf{B}}(\mathbf{D}) \subset \mathbf{C}^0(\mathbf{D})$ , onde  $\mathbf{C}^0_{\mathbf{B}}(\mathbf{D})$  é o conjunto das funções contínuas limitadas [ADAM75].

Para tornar  $H^2(\mathbf{D})$  um espaço de Hilbert resta-nos definir um produto interno e a norma associada. Considere a função  $\mathbf{a} : H^2(\mathbf{D}) \times H^2(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbf{R}$  definida por

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbf{D}} [ \mathbf{u}_{xx} \mathbf{v}_{xx} + \mathbf{u}_{yy} \mathbf{v}_{yy} + 2 \mathbf{u}_{xy} \mathbf{v}_{xy} ]$$

Podemos verificar facilmente que é uma forma bilinear simétrica e atende às propriedades de um produto interno, exceto que  $\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$  não implica que  $\mathbf{v}$  seja a função nula. Logo a função  $\varphi \in H^2(\mathbf{D}) \rightarrow \{ \mathbf{a}(\varphi, \varphi) \}^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{R}$  é apenas uma seminorma. Vamos procurar superar este inconveniente buscando uma expressão alternativa para a energia  $\mathbf{J}(\varphi)$  que defina uma norma. Ela será fundamental no estabelecimento da existência e unicidade da solução do nosso problema e estaremos em condições de escolher  $\mathbf{V} = H^2(\mathbf{D})$  como o nosso espaço admissível.

## O FUNCIONAL DE ENERGIA

Uma interpretação física do problema abstrato, definido anteriormente, pode mostrar-se útil para guiar o nosso raciocínio.

Imagine a nossa região de interesse retangular como sendo a base e a tampa de uma caixa, em forma de paralelepípedo de altura maior que o maior valor das cotas. Se marcarmos o conjunto de posições  $\mathbf{q}_i$  na base, e igualmente na tampa, podemos pensar em fixar uma haste retilínea ligando cada par de pontos correspondentes. Em seguida podemos marcar sobre cada haste o valor da cota associada e tomando-o como ponto de referência, cortar cada haste de tal forma que o pedaço retirado tenha o tamanho igual ao dobro do valor da tolerância associada. Nesta visão fenomenológica, queremos colocar uma placa fina, inicialmente plana e igual à base (e a tampa), dentro da caixa passando por entre todas as hastes sem apresentar dobras (ou vincos), deformando-a até que se encontre em uma configuração de equilíbrio (desprezando a gravidade). Observemos ainda que a placa poderá encostar em

qualquer haste. Se isto ocorrer a haste exercerá uma força vertical sobre a placa e caso contrário a força da haste sobre a placa será nula.

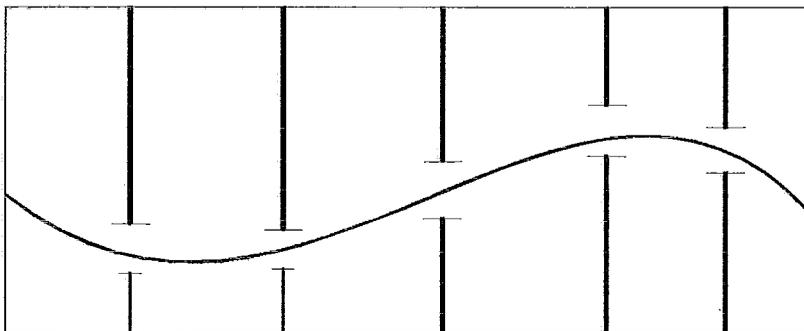


Fig.: Configuração física no caso unidimensional

Esta interpretação física indica que não podemos garantir a unicidade da configuração da placa. Por exemplo, suponha um certo conjunto de hastes para a qual uma configuração plana resolve o problema com folga. Uma outra, também plana mas ligeiramente deslocada passará por entre as hastes e terá a mesma energia nula.

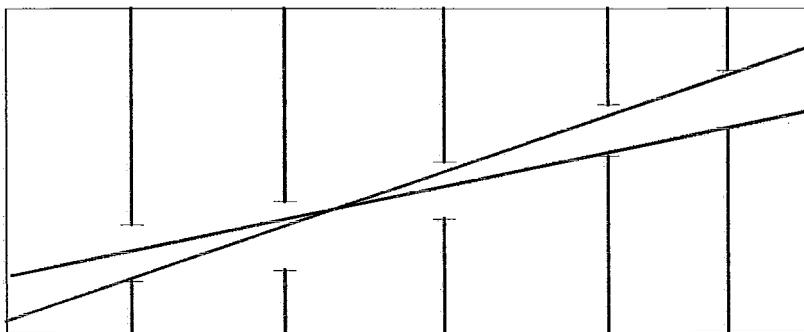


Fig.: Ilustração da não unicidade no caso unidimensional

Alternativamente, a colocação de um par de molas em cada haste, ligando os seus extremos livres à placa, dá origem a um sistema físico capaz de fornecer uma configuração de equilíbrio única, na medida que considerarmos a energia do sistema como a energia elástica da placa mais a energia de deformação das molas. Uma pequena deformação da placa exigirá um gasto de energia adicional pelas molas. A expressão matemática da energia, neste problema é apresentada em [TERZ89] onde garante-se que ela é uma norma em  $V = H^2(D)$ :

$$J(\varphi) = \int_D [\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + 2\varphi_{xy}^2] da + \sum_{i=1}^N k_i [\varphi(q_i) - z_i]^2$$

Esta discussão leva-nos a propor um funcional  $J$  alternativo correspondendo à energia de uma placa presa aos vértices da base por quatro molas (fracas) e tocando nas paredes laterais ao longo de uma curva contínua fechada.

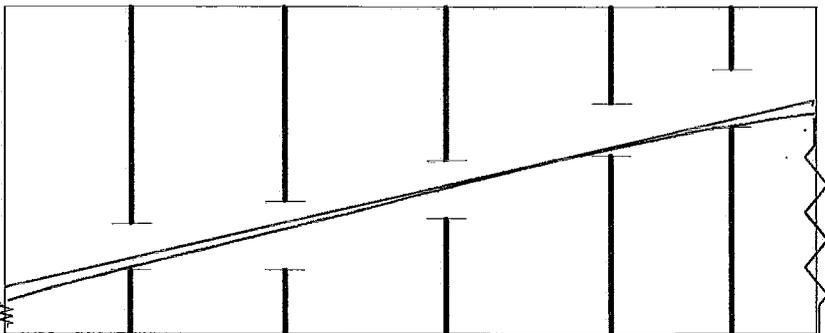


Fig.: Nova configuração física no caso unidimensional

Esta formulação, envolvendo um compromisso mínimo com a exigência matemática de  $J$  ser uma norma irá garantir a unicidade da solução do problema de otimização.

**Definição**

O funcional bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_J : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$  é definido por

$$\langle \varphi, \psi \rangle_J = \int_D [\varphi_{xx} \psi_{xx} + \varphi_{yy} \psi_{yy} + 2 \varphi_{xy} \psi_{xy}] + \sum_{j=1}^4 k_j \varphi(c_j) \psi(c_j)$$

onde  $k_j \in \mathbf{R}$ ,  $k_j \geq 0$  e  $c_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  são os quatro vértices de  $D$ .

O nosso funcional de energia  $J : V \rightarrow \mathbf{R}$  será então escrito como a forma quadrática  $J(\varphi) = \langle \varphi, \varphi \rangle_J$ .

**Proposição**

O funcional  $\| \cdot \|_J = J(\cdot)^{\frac{1}{2}}$  é uma norma em  $V$  topologicamente equivalente à norma usual de  $H^2(D)$ ,

$$\| \varphi \|_2 = \left\{ \int_D \left[ \varphi^2 + (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + (\varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + \varphi_{xy}^2) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

*Prova*

$J$  é  $V$ -elítico, isto é, existe  $c > 0$  tal que  $\forall \varphi \in V$ ,  $\| \varphi \|_2 \leq c J(\varphi)$  [TERZ89]. Mostremos agora que para algum  $c' > 0$  devemos ter  $J(\varphi) \leq c' \| \varphi \|_2$ . Como a integral em  $J(\varphi)$  é dominada por  $2 \| \varphi \|_2^2$  basta provar que o somatório em  $J$  é dominado por  $c'' \| \varphi \|_2^2$  para algum  $c''$ .

Consideremos que  $c_1, c_2, c_3$  sejam os vértices de um subtriângulo  $\Delta_0$  de  $D$  e que  $c_1, c_3, c_4$  sejam os vértices do subtriângulo complementar  $\Delta_1 = D - \Delta_0$ . Sejam  $L_0(\varphi)$  o interpolador linear de  $\varphi$  nos pontos  $c_1, c_2, c_3$  e  $L_1(\varphi)$  o interpolador linear de  $\varphi$  nos pontos  $c_1, c_3, c_4$ . Então para  $k = \max\{k_j \mid j = 1, 2, 3, 4\}$  vale

$$\sum_{j=1}^4 k_j [\varphi(c_j)]^2 \leq k \left[ \sum_{j=1,2,3} \varphi(c_j)^2 + \sum_{j=1,3,4} \varphi(c_j)^2 \right]$$

Como  $\int_{\mathbf{D}} L_0(\varphi)^2$  e  $\int_{\mathbf{D}} L_1(\varphi)^2$  são funções quadráticas dos  $\varphi(c_j)$

correspondentes podemos arranjar uma constante  $C'$  tal que

$$\sum_{j=1}^4 k_j [\varphi(c_j)]^2 \leq C' k \left[ \int_{\Delta_0} L_0(\varphi)^2 + \int_{\Delta_1} L_1(\varphi)^2 \right]$$

Como uma função linear é a função de  $\mathbf{H}^1(\mathbf{D})$  de menor norma  $\| \cdot \|_1$  que interpola os valores  $\varphi(c_j)$  nos vértices do triângulo correspondente existe uma constante  $C''$  tal que

$$\sum_{j=1}^4 k_j [\varphi(c_j)]^2 \leq C'' k \| \varphi \|_1^2 \leq C'' k \| \varphi \|_2^2$$

□

Observemos que o funcional bilinear  $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$  é o produto interno associado à norma  $\| \cdot \|_J$ . Na sequência, a menos que seja expressamente mencionado em contrário, usaremos  $\| \cdot \|$  para representar  $\| \cdot \|_J$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para denotar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ .

## OS PROBLEMAS APROXIMADOS E SUAS SOLUÇÕES

Consideraremos na sequência alguns problemas, lembrando que

$\mathbf{Q}^4 = \{ (q_i, z_i, \varepsilon_i) \in \mathbf{D} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+; i = 1, \dots, N \}$  é o conjunto amostral que restringe as funções de interesse ao conjunto de alternativas viáveis  $\Phi \cap \mathbf{V}$  onde

$$V = H^2(D)$$

e

$$\Phi = \{ \alpha \in L^\infty(D) \mid \alpha(q_i) \in [z_i - \varepsilon_i, z_i + \varepsilon_i], i = 1, \dots, N \}$$

Observemos que  $H^2(D)$  é um espaço de dimensão infinita e que qualquer solução computacional deverá depender de um número finito de parâmetros. Por outro lado, mesmo se o problema puder ser considerado como bem posto, uma solução analítica não pode, em geral ser obtida.

Em consequência necessitamos da pesquisa de soluções *aproximadas* ótimas, garantir a sua existência e unicidade e verificar a convergência destas aproximações para a solução (“exata”) procurada  $\varphi$ . Essas soluções aproximadas  $\varphi_m$  de  $\varphi$  podem ser procuradas através de expansões em termos de funções convenientes para o problema e que atendam a algum critério de simplicidade.

Os requisitos de uma solução computacional eficiente sugerem, de forma natural, subespaços de dimensão **finita**  $V_m \subset V$  onde a solução aproximada é buscada. O erro da aproximação será dado por  $\|\varphi - \varphi_m\|$  através da norma  $\|\cdot\|$  definida em  $V$  com  $\varphi \in V$  e  $\varphi_m \in V_m$ .

O uso destes subespaços é explorado pelo método clássico de aproximação da solução de um problema variacional, conhecido como método de Ritz, cuja idéia básica é escolher um número finito de funções, isto é, uma base do subespaço  $V_m \subset V$ ,  $\dim V_m < \infty$ ,  $n \geq 1$ , notada  $\{B_k\}_{k=1, \dots, n}$ , o que permite escrever

$$V_m = \left\{ \sum_{k=1}^n \beta_k B_k ; \beta_k \in \mathbf{R}, \forall k \right\}$$

e nele buscar dentre as suas funções aquela que minimiza a energia potencial.

Passamos a ter então dois tipos de problemas.

Um problema  $P$  ou *problema contínuo*

$$(P) \quad \text{Min } J(\varphi)$$

$$\text{sujeito a } \varphi \in \Phi_V$$

$$\text{onde } \Phi_V = \Phi \cap V = \{ \varphi \in V \mid \varphi(q) - z - \varepsilon \leq 0, \varphi(q) - z + \varepsilon \geq 0 \} \subset V$$

e uma seqüência de problemas, cada um dos quais será chamado problema  $P_m$  ou *problema discreto*

$$(P_m) \quad \text{Min } J(\varphi)$$

$$\text{sujeito a } \varphi \in \Phi_m$$

$$\text{onde } \Phi_m = \Phi \cap V_m.$$

A expressão de  $J(\varphi)$  com  $\varphi \in V_m$  será obtida como se segue.

Suponha  $\dim V_m = n$ . Podemos expressar  $\varphi \in V_m$  na forma

$$\varphi(\beta; q) = \sum_{k=1}^n \beta_k B_k(q)$$

com  $q \in D$  e  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

Portanto as suas derivadas parciais em relação a  $x$  e  $y$  se escrevem

$$\varphi_{ab}(\beta; q) = \sum_{k=1}^n \beta_k ((B_k)_{ab})(q).$$

Substituindo temos

$$\begin{aligned}
J(\varphi) &= \int_D [\varphi_{xx} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} \varphi_{yy} + 2 \varphi_{xy} \varphi_{xy}] + \sum_{j=1}^4 k_j \varphi(c_j) \varphi(c_j) \\
&= \int_D [\sum_k \beta_k (\mathbf{B}_k)_{xx} \cdot \sum_l \beta_l (\mathbf{B}_l)_{xx} + \sum_k \beta_k (\mathbf{B}_k)_{yy} \cdot \sum_l \beta_l (\mathbf{B}_l)_{yy} + \\
&\quad + 2 \sum_k \beta_k (\mathbf{B}_k)_{xy} \cdot \sum_l \beta_l (\mathbf{B}_l)_{xy}] + \\
&\quad + \sum_{j=1}^4 k_j \sum_k \beta_k \mathbf{B}_k(c_j) \cdot \sum_l \beta_l \mathbf{B}_l(c_j) = \\
&= \sum_{k,l} \beta_k \beta_l \left\{ \int_D [(\mathbf{B}_k)_{xx} (\mathbf{B}_l)_{xx} + (\mathbf{B}_k)_{yy} (\mathbf{B}_l)_{yy} \right. \\
&\quad \left. + 2 (\mathbf{B}_k)_{xy} (\mathbf{B}_l)_{xy}] + \sum_{j=1}^4 k_j \mathbf{B}_k(c_j) \mathbf{B}_l(c_j) \right\}
\end{aligned}$$

De forma compacta teremos  $J(\varphi(\beta; \cdot)) = \beta^T Q \beta$

com  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  onde

$$Q_{kl} = \int_D [(\mathbf{B}_k)_{xx} (\mathbf{B}_l)_{xx} + (\mathbf{B}_k)_{yy} (\mathbf{B}_l)_{yy} + 2 (\mathbf{B}_k)_{xy} (\mathbf{B}_l)_{xy}] + \sum_{j=1}^4 k_j \mathbf{B}_k(c_j) \mathbf{B}_l(c_j)$$

é chamada *matriz de deformações*.

Definindo  $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{B}_i(q_j)$ , uma matriz  $N \times n$ , que chamaremos de *matriz de restrições* a restrição  $\varphi \in \Phi_m$  equivale a:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \mathbf{R}_{ki} \beta_k &\leq z_i + \varepsilon_i \\
\sum_{k=1}^n \mathbf{R}_{ki} \beta_k &\geq z_i - \varepsilon_i \quad , i=1, \dots, N
\end{aligned}$$

ou ainda

$$\mathbf{R} \beta \leq \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{R} \beta \geq \mathbf{z} - \boldsymbol{\varepsilon}$$

O problema discreto  $\mathbf{P}_m$  é dessa forma identificado como um problema de Programação Quadrática com restrições lineares [LUEN76] que se escreve como

$$\begin{aligned} (\mathbf{PQ}_m) \quad & \text{Min } \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta} \\ & \text{sujeito a } \mathbf{R} \boldsymbol{\beta} \leq \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ & \mathbf{R} \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{z} - \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

Os problemas, assim colocados, apresentam três dificuldades básicas. A *primeira* consiste na garantia de existência de uma solução *viável*, isto é, aquela que atende às restrições, a *segunda* na existência de um mínimo para a função quadrática  $\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta}$  e a *terceira* na avaliação da qualidade da aproximação.

Suponha que  $\bar{\varphi}$  seja a solução do problema contínuo e  $\bar{\varphi}_m$  a solução de um problema discreto. A qualidade da aproximação  $\bar{\varphi}_m$  em relação à solução  $\bar{\varphi}$  pode ser melhorada aumentando-se a dimensão do espaço  $\mathbf{V}_m$  à custa da inclusão de funções, cada vez mais complexas, à base inicial. Uma variante desta idéia leva-nos ao método de Ritz-Galerkin no qual procura-se manter uma mesma classe de funções, por exemplo polinômios por partes definidos no domínio  $\mathbf{D}$ , para construir subespaços com dimensão cada vez maior e ordenados pela inclusão de modo que se  $r > s$  são as dimensões dos subespaços então  $\mathbf{V}_s \subset \mathbf{V}_r$ .

Esta construção dá origem a uma sequência de soluções, de problemas discretos em subespaços de dimensão crescente, que deverá convergir para a solução do problema contínuo.

**Teorema 1**

O problema  $\mathbf{P}$  admite uma única solução.

**Prova**

$V$  é um espaço de Sobolev. As restrições de  $\mathbf{P}$  são lineares e contínuas na norma  $\| \cdot \|$  definindo portanto um conjunto viável  $\Phi_V$  não vazio, convexo e fechado. A função objetivo é uma norma ao quadrado e portanto contínua e estritamente convexa. Pode-se então garantir que  $\mathbf{P}$  admite uma e somente uma solução [CÉA71].

□

**Corolário**

Se  $\Phi_m$  é não vazio o problema  $\mathbf{P}_m$  admite uma única solução.

Para provarmos que as soluções dos problemas  $\mathbf{P}_m$  convergem para a solução do Problema  $\mathbf{P}$  precisamos de algumas hipóteses e resultados preliminares.

Lembremos que

$$\Phi_V = \{ \varphi \in V \mid \varphi(q_i) \in I(z_i, \varepsilon_i) \}$$

$$\Phi_m = \{ \varphi \in V_m \mid \varphi(q_i) \in I(z_i, \varepsilon_i) \}$$

onde  $I(z_i, \varepsilon_i) = [z_i - \varepsilon_i, z_i + \varepsilon_i]$

Podemos afirmar ainda que  $\Phi_V$  e  $\Phi_m$  são conjuntos convexos para todo  $m$  e se  $V_m \subset V_{m+1}$  então  $\Phi_m \subset \Phi_{m+1}$  para todo  $m \geq 1$ .

Consideremos inicialmente um resultado geral de convergência expresso pelo lema abaixo.

**Lema 1**

Seja  $\varphi_m \in V_m$  e  $\bar{\varphi}$  a solução ótima. Suponha satisfeitas as hipóteses

(a)  $\varphi_m \rightarrow \varphi \in V$  fracamente

(b)  $\varphi \in \Phi$

(c)  $\lim \| \varphi_m \| \leq \| \bar{\varphi} \|$

Então  $\varphi_m \rightarrow \bar{\varphi}$ .

**Prova**

A sequência das  $\varphi_m$  é limitada, por (c). Para todo  $\delta > 0$  e  $m$  suficientemente grande

(a) garante que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \| \varphi_m - \varphi \|^2 \leq \| \varphi_m \|^2 + \| \varphi \|^2 - 2 \langle \varphi_m, \varphi \rangle \\ &\leq \| \varphi_m \|^2 + \| \varphi \|^2 - 2 \langle \varphi, \varphi \rangle + \delta = \| \varphi_m \|^2 - \| \varphi \|^2 + \delta \end{aligned}$$

ou seja  $\| \varphi \|^2 \leq \| \varphi_m \|^2 + \delta$ .

Por (b) e pela otimalidade de  $\bar{\varphi}$  temos  $\| \bar{\varphi} \| \leq \| \varphi \|$ .

Logo, usando (c) para  $\delta > 0$  e  $m$  suficientemente grande

$$\| \bar{\varphi} \| \leq \| \varphi \|^2 \leq \| \varphi_m \|^2 + \delta \leq \| \bar{\varphi} \| + 2\delta$$

Portanto  $\| \varphi_m \| \rightarrow \| \bar{\varphi} \| = \| \varphi \|$

Mas  $\| \varphi_m - \varphi \|^2 \leq \| \varphi_m \|^2 - \| \varphi \|^2 + \delta$  implica então  $\| \varphi_m - \varphi \| \rightarrow 0$  e

a unicidade garante que  $\varphi = \bar{\varphi}$ .

□

Para garantir a validade da convergência de uma sequência de soluções de problemas discretos para a solução ótima precisamos de algumas hipóteses.

A primeira caracteriza os espaços  $V_m$  como capazes de aproximar o espaço  $V$ . Observemos que esta hipótese não seja válida podemos encontrar um funcional similar a  $J$  para o qual a solução ótima não pode ser aproximada por funções de  $V_m$ .

Hipótese **H1**: Suponha que  $\forall v \in V, \exists v_m \in V_m$  tal que  $v_m \rightarrow v, m \rightarrow \infty$ .

A segunda indica a flexibilidade necessária às funções de  $V_m$  para poder atender às restrições como veremos na demonstração do lema 1.

Hipótese **H2**: Para todo  $p, p_i \in D; i = 1, 2, \dots, N$ , existem  $M > 0$  e  $\exists d > 0$  tais que  $\forall m > M \exists \alpha_m \in V_m, \|\alpha_m\| < d$  tal que  $\alpha_m(p_i) = 0$  e  $\alpha_m(p) > 0$ .

Com estas hipóteses estamos em condições de provar dois resultados preliminares que garantem as condições do Lema 1 e a validade do teorema de convergência.

## Lema 2

Suponha válidas **H1** e **H2**. Então, para  $m$  suficientemente grande,  $\Phi_m$  é não vazio. Além disso  $\forall \varphi \in \Phi_V, \exists \varphi_m \in \Phi_m$  tal que  $\varphi_m \rightarrow \varphi, m \rightarrow \infty$ ;

### Prova

Dado  $\varphi \in \Phi$ , por **H1**,  $\exists v_m \in V_m$  tal que  $v_m \rightarrow \varphi, m \rightarrow \infty$ .  
por **H2**, para  $m$  suficientemente grande, existem  $\alpha_m^i \in V_m$  tais que

$\alpha_m^i(q_j) = \delta_{ij}$ . Neste caso  $\sum_{i=1}^N z_i \alpha_m^i \in \Phi_m$  e daí

$\Phi_m = \Phi_v \cap V_m \neq \emptyset$ . Além disso para  $m$  suficientemente grande

$$\varphi_m = v_m + \sum_{i=1}^N [\varphi(q_i) - v_m(q_i)] \alpha_m^i$$

satisfaz

$$\varphi_m(q_j) = \varphi(q_j) \in I(z_j, \varepsilon_j), \forall j.$$

Mas

$$v_m \rightarrow \varphi, m \rightarrow \infty \Rightarrow v_m(q_j) \rightarrow \varphi(q_j), \forall j,$$

pois  $H^2(D)$  está imerso em  $C^0$ .

$$\text{Logo } \|\varphi - \varphi_m\| \leq \|\varphi - v_m\| + \|\varphi_m - v_m\| \leq$$

$$\leq \|\varphi - v_m\| + \sum_{i=1}^N |\varphi(q_i) - v_m(q_i)| \|\alpha_m^i\|$$

$$\leq \|\varphi - v_m\| + d \sum_{i=1}^N |\varphi(q_i) - v_m(p_i)|$$

o que acarreta  $\|\varphi - \varphi_m\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ .

□

### Lema 3

Se  $\varphi_m \in \Phi_m, \varphi \in V$  e  $\varphi_m \rightarrow \varphi$  fracamente então  $\varphi \in \Phi_v$

#### *Prova*

Seja  $l_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  linear definida por  $l_i(\varphi) = \varphi(q_i), \forall i$

Então pelas hipóteses  $\varphi_m(q_i) \rightarrow \varphi(q_i), \forall i$

Como  $\varphi_m(q_i) \in I(z_i, \varepsilon_i), \forall i$  temos  $\varphi(q_i) \in I(z_i, \varepsilon_i)$

□

**Teorema 2**

Supondo **H1** e **H2** a sequência das soluções  $\bar{\varphi}_m$  dos problemas  $\mathbf{P}_m$  converge para a solução  $\bar{\varphi}$  do Problema  $\mathbf{P}$ .

*Prova*

Seja  $\bar{\varphi}_m$  a solução de  $\mathbf{P}_m$  e  $\varphi_m \in \Phi_m$  como no Lema 2:  $\varphi_m \rightarrow \bar{\varphi}$

Então, pela otimalidade de  $\bar{\varphi}_m$  tem-se  $J(\bar{\varphi}_m) \leq J(\varphi_m)$  e tomando-se uma subsequência de  $\{\bar{\varphi}_m\}$ , se necessário  $\lim J(\bar{\varphi}_m) \leq J(\bar{\varphi})$ .

Como  $\{\bar{\varphi}_m\}$  é limitada existe  $\varphi^\infty$  tal que  $\bar{\varphi}_m \rightarrow \varphi^\infty$  fracamente.

Mas, pelo Lema 3,  $\varphi^\infty \in \Phi$ .

Aplicando o Lema 1 às funções  $\bar{\varphi}_m$ ,  $\varphi^\infty$  e  $\bar{\varphi}$  conclui-se que para a subsequência tem-se  $\bar{\varphi}_m \rightarrow \bar{\varphi}$ .

Mas como a sequência  $\{\bar{\varphi}_m\}$  é limitada e qualquer subsequência convergente de  $\{\varphi_m\}$  converge para  $\bar{\varphi}$  então a sequência  $\{\bar{\varphi}_m\}$  converge a  $\bar{\varphi}$ .

□

O teorema acima é uma versão particular de um resultado geral e a sua linha de demonstração segue a mesma sequência [CEA71]. Observemos que o resultado aqui considerado refere-se apenas à aproximação do espaço admissível com as restrições tratadas como exatas.

As questões de convergência serão retomadas no capítulo 4 onde será necessário considerar um outro problema no qual, além da aproximação do espaço admissível, é tratada também a aproximação das suas restrições.

## CONCLUSÕES

O problema de modelagem de terreno introduzido no capítulo 1 foi formulado como um problema de otimização com restrições com uma função objetivo que mostramos ser uma norma (ao quadrado) topologicamente equivalente à norma usual do espaço admissível  $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$ . Este critério admite uma interpretação como a energia de uma placa de material elástico. Provamos que a versão contínua do problema admite uma única solução.

Para poder obter uma aproximação desta solução formulamos os problemas em subespaços de dimensão finita identificando-os com problemas de Programação Quadrática (com restrições). A existência e unicidade desses problemas foi discutida. Provamos que, sob hipóteses relativamente fracas, a sequência de soluções desses problemas discretos converge para a solução do problema contínuo.

Escolhido o espaço admissível  $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$  a validade dos resultados foi garantida de forma abstrata. É preciso escolher subespaços satisfazendo às hipóteses **H1** e **H2**. No próximo capítulo vamos discutir características da construção desses subespaços discretos.

---

A construção dos subespaços  $V_m$  de  $H^2(D)$ , caracterizados no capítulo anterior, é apresentada através do Método de Elementos Finitos:  $V_m$  torna-se um espaço de elementos finitos. Apresentamos as idéias básicas do método e exemplos de alguns elementos relevantes para a nossa formulação. Os elementos lagrangeanos, embora não conformes para o problema da placa, serão considerados também no próximo capítulo. Nos exemplos de elementos conformes apresentamos algumas dificuldades que o seu uso dá origem: grau elevado ou construção geométrica complexa.

Discutimos as idéias principais da construção de triangulações no plano, de seus refinamentos e que constituem ingredientes fundamentais da construção dos espaços de elementos finitos. O interesse em triangulações compostas de triângulos com boa forma e no uso de refinamentos adaptativos sugere a escolha de triangulações CFK adaptativas, composta unicamente de triângulos retângulos isósceles. Discutimos várias de suas interessantes propriedades. O critério de refinamento devido à Rivara, válido para quaisquer triangulações, é aplicado neste caso onde as características específicas desta família de triangulações são exploradas.

### O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O *método dos elementos finitos* (MEF) é um procedimento sistemático de implementar o método de Ritz-Galerkin. Ele permite construir uma sequência de subespaços de dimensão finita, os *espaços de elementos finitos*, com propriedades computacionalmente atraentes.

Vamos supor que  $V = H^2(\mathbf{D})$  é o nosso espaço admissível. Os espaços de elementos finitos são notados usualmente por  $V_h$ , onde  $h$  é um parâmetro geométrico relacionado à dimensão do subespaço.

O método repousa sobre algumas hipóteses básicas [CIAR87].

Em primeiro lugar podemos estabelecer decomposições do domínio  $\mathbf{D}$ , em um número finito de células, usualmente em triângulos (quadriláteros e outros polígonos também podem ser usados). No nosso caso, uma decomposição de  $\mathbf{D}$  será suposta sempre uma triangulação e notada  $\Delta$ . Os triângulos  $\mathbf{K} \in \Delta$  são tais que  $\mathbf{D} = \bigcup_{\mathbf{K} \in \Delta} \mathbf{K}$  e têm interior não vazio. Fazem ainda parte dessas hipóteses básicas as seguintes propriedades:

- para todo  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \Delta, \mathbf{K}_1 \neq \mathbf{K}_2$  tem-se

$$\text{interior}(\mathbf{K}_1) \cap \text{interior}(\mathbf{K}_2) = \emptyset ;$$

- Se  $\mathbf{E}_\Delta$  é o conjunto de lados dos triângulos ou *arestas* da triangulação então para todo  $\mathbf{a} \in \mathbf{E}_\Delta$  uma das alternativas é válida:

(i)  $\mathbf{a} \in \partial\mathbf{D}$ , a fronteira do domínio  $\mathbf{D}$  e portanto existe um único  $\mathbf{K} \in \Delta$  tal que  $\mathbf{a}$  é um lado de  $\mathbf{K}$

(ii) existem  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \in \Delta, \mathbf{K}_1 \neq \mathbf{K}_2$  tais que  $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 = \{\mathbf{a}\}$ ; neste caso os elementos  $\mathbf{K}_1$  e  $\mathbf{K}_2$  são ditos adjacentes.

- para todo  $\mathbf{K} \in \Delta$  podemos associar um parâmetro  $h_{\mathbf{K}} = \text{diâmetro}(\mathbf{K}) = \text{maior dos lados de } \mathbf{K}$ . O valor  $h = \max\{h_{\mathbf{K}}; \mathbf{K} \in \Delta\}$ , que chamaremos *tamanho fundamental* estará então associado à triangulação  $\Delta$  e guardará uma relação com a dimensão do espaço  $V_h$ .

- a fronteira de  $\mathbf{D}$  e de todo elemento  $\mathbf{K}$  não admite cúspides.

Estaremos supondo ainda que para todo  $\mathbf{K} \in \Delta$  podemos definir um espaço  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}} = \{ \mathbf{p}_{\mathbf{K}} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{R} \}$  de funções reais definidas no elemento  $\mathbf{K}$  tais que existem  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$  com  $\mathbf{p}_{\mathbf{K}} = \mathbf{v}|_{\mathbf{K}}$ , as restrições de  $\mathbf{v}$  a  $\mathbf{K}$ , cuja existência é garantida pelas propriedades de  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$  como veremos. Em geral o espaço  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$  é composto por polinômios (ou “quase-polinômios”). Seja  $\Sigma_{\mathbf{K}}$  o conjunto de graus de liberdade de  $\mathbf{p}_{\mathbf{K}}$ , isto é, o conjunto de parâmetros que definem univocamente uma função em  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$  e cuja cardinalidade fornece a dimensão de  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$ . Um elemento associado a um triângulo  $\mathbf{K}$  será entendido como o espaço  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$  construído sobre ele.

Mas, sem hipóteses adicionais relativas aos espaços  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$  não podemos garantir que os espaço de elementos finitos  $\mathbf{V}_h$  seja um subespaço de  $\mathbf{V}$ . O teorema abaixo fornece essa garantia no nosso caso de interesse, o problema da placa fina [CIAR87].

### Proposição

Suponha que  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}} \subset \mathbf{H}^2(\mathbf{K})$ ,  $\forall \mathbf{K} \in \Delta$  e  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{C}^1(\mathbf{D})$ . Então vale a inclusão  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{H}^2(\mathbf{D})$ .

Para completar o conjunto de nossos ingredientes básicos vamos impor que o espaço  $\mathbf{V}_h$  admita uma base “canônica” formada de funções com suporte “pequeno” (local) e que sejam facilmente descritíveis. O conjunto desses suportes deve apresentar a seguinte propriedade: qualquer ponto de  $\mathbf{D}$  estará sempre na interseção de pelo menos um par deles.

Para caracterizar que  $\mathbf{V}_h$  é um subespaço de  $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$  é preciso verificar as condições abaixo:

(i) *Condição de Completude*: esta é uma condição de inclusão mínima onde  $\mathbf{P}_{\mathbf{K}}$  é tal que  $\mathbf{P}_2(\mathbf{K}) \subset \mathbf{P}_{\mathbf{K}}$ , com  $\mathbf{P}_2(\mathbf{K})$  o conjunto dos polinômios de grau 2 em  $\mathbf{K}$ ;

(ii) *Condição de Conformidade*: todas as derivadas de ordem menor ou igual a 2 de  $\varphi_h \in V_h$  devem ser contínuas através de quaisquer arestas compartilhadas por dois elementos de  $\Delta$ , ou equivalentemente  $\varphi_h \in C^1(\mathbf{D})$ ;

Os elementos que satisfazem a essas condições serão chamados de **elementos conformes** e os espaços  $V_h$  de *espaços de elementos finitos conformes*; nestes temos a garantia de uma energia finita.

Embora a condição (i) seja essencial para a convergência, a segunda não o é e pode ser relaxada. Se deixarmos de lado a condição (ii) vamos chamar esses elementos de **elementos não-conformes** e os subespaços  $V_h$  correspondentes de *espaços de elementos finitos não-conformes*.

A busca de uma solução em  $C^0(\mathbf{D})$  ilustra a situação de não conformidade. Neste contexto os espaços  $V_h$  não serão mais subespaços de  $V$ . É possível entretanto, considerando o problema irrestrito, caracterizar a existência e unicidade de uma aproximação ótima, em alguns casos. Iremos trabalhar com estes espaços de elementos finitos conformes.

### ALGUNS EXEMPLOS DE ELEMENTOS CONFORMES

Consideremos  $P_k$  o espaço dos polinômios  $p = \sum_{|\mathbf{a}| \leq k} \gamma_{\mathbf{a}} x^{\mathbf{a}}$  de grau  $\leq k$  nas variáveis  $x_1, x_2$ , onde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  e  $|\mathbf{a}| = a_1 + a_2$ .

Temos que  $\dim P_k = 1/2 (k+1)(k+2)$  e para  $A \subset \mathbf{R}^2$ ,  $\text{int}(A) \neq \emptyset$  podemos definir  $P_A = P_k(A) = \{p|_A; p \in P_k\}$ .

No caso do plano, os mais simples elementos que podemos definir em uma triangulação são os elementos *lagrangeanos*, para os quais  $P_K$  é um espaço de polinômios e  $\Sigma_K$  envolve apenas valores em pontos. Os elementos lagrangeanos não dão origem, em geral, a espaços conformes para o problema da placa.

Suponha que  $\{ \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k \}$  é o conjunto de vértices do triângulo  $\mathbf{K}$ . Seja  $\mathbf{a}_{ij} = 1/2 (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j)$  o ponto médio da aresta  $[\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j]$  e  $\mathbf{a}_{ijk} = 1/3 (\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k)$  o baricentro de  $\mathbf{K}$ .

O mais simples deles é o *elemento de Courant*, composto de funções *lineares*:

$$\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_1(\mathbf{K});$$

$$\Sigma_K = \{ p(\mathbf{a}_i); p \in \mathbf{P}_K; 1 \leq i \leq 3 \};$$

Podemos ainda considerar os elementos *quadráticos*

$$\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_2(\mathbf{K})$$

$$\Sigma_K = \{ p(\mathbf{a}_i); 1 \leq i \leq 3; p(\mathbf{a}_{ij}); 1 \leq i < j \leq 3; p \in \mathbf{P}_K \},$$

e os elementos *cúbicos*

$$\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_3(\mathbf{K})$$

$$\Sigma_K = \{ p(\mathbf{a}_i); 1 \leq i \leq 3; p(\mathbf{a}_{ij}); 1 \leq i < j \leq 3;$$

$$p(\mathbf{a}_{ijk}); 1 \leq i < j < k \leq 3; p \in \mathbf{P}_K \},$$

Podemos também considerar elementos para os quais os graus de liberdade são derivadas parciais  $\partial_j p$ ,  $1 \leq j \leq 2$ ,  $\partial_{jk} p$ ,  $1 \leq j < k \leq 2$ , derivadas direcionais  $\mathbf{D}p(\mathbf{a})\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{D}^2p(\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{c})$ , . . . onde  $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$  são vetores de  $\mathbf{R}^2$  ou derivadas normais a uma aresta  $\partial_{\mathbf{v}} p$ .

Neste caso encontram-se alguns elementos conformes para o problema da placa fina e na sua escolha temos que levar em conta que o objetivo é escolher polinômios por partes que sejam determinados por um pequeno e conveniente

conjunto de graus de liberdade e mesmo assim apresentem o grau desejado de continuidade e aproximação.

Não obstante, a sua implementação efetiva oferece dificuldades computacionais pois ou a dimensão dos espaços “locais”  $\mathbf{P}_K$  é muito grande (pelo menos 18 para elementos triangulares polinomiais) ou a estrutura do espaço  $\mathbf{P}_K$  é complicada, como podemos ver na discussão que se segue.

Uma função de  $\mathbf{C}^1(\mathbf{D})$  está em  $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$  e portanto é admissível para o problema de quarta ordem. Ao preferir trabalhar exclusivamente com polinômios, evitando o uso de funções racionais, podemos escolher um polinômio completo de quinto grau em duas variáveis  $x$  e  $y$  para o qual os graus de liberdade são os valores da função, os de suas derivadas até segunda ordem nos vértices e os valores da derivada normal no ponto médio das arestas, o que garante a continuidade  $\mathbf{C}^1$ .

Estas conclusões decorrem de um resultado de Zenicek: “Para alcançar polinômios por partes de classe  $\mathbf{C}^q$  em uma triangulação arbitrária, graus de liberdade devem incluir todas as derivadas de ordem menor ou igual a  $2q$  nos vértices ” [STRA73].

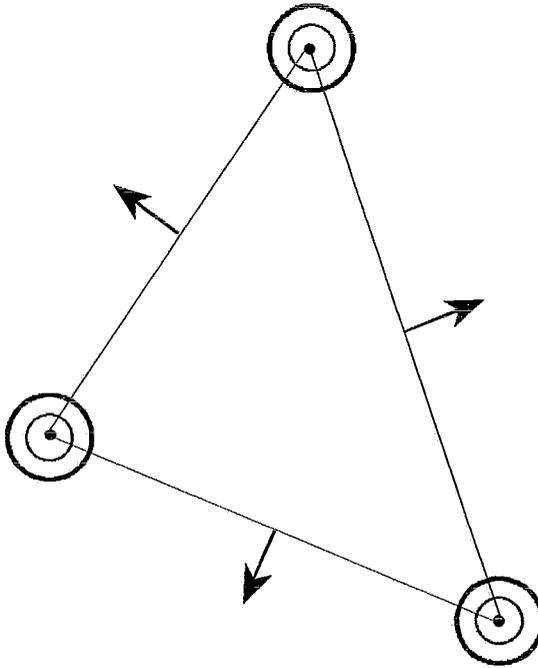
Podemos citar como exemplos de elementos conformes para o problema da placa.

Nas ilustrações abaixo o ponto indica atribuição do valor de  $\mathbf{p}(\mathbf{a}_i)$ , o círculo menor o valor das derivadas primeiras  $\partial_k \mathbf{p}(\mathbf{a}_i)$ , o maior o das derivadas segundas,  $\partial_{k,l} \mathbf{p}(\mathbf{a}_i)$  e as setas a derivada normal no meio da aresta  $\partial_\nu \mathbf{p}(\mathbf{a}_{ij})$ .

### Elemento de Argyris

$$P_K = P_5(K); \dim P_K = 21$$

$$\Sigma_K = \{p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{11} p(a_i), \partial_{22} p(a_i), \partial_{12} p(a_i); 1 \leq i \leq 3; \\ \partial_\nu p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3 \}$$



**Fig.:** Elemento de Argyris

Como uma outra possibilidade podemos impor que a derivada normal ao longo das arestas seja uma cúbica sobre cada uma destas. Esta hipótese conduz ao elemento abaixo.

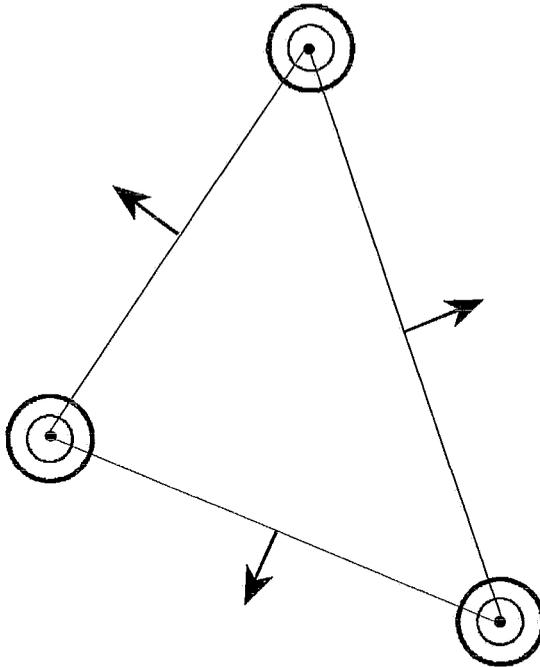
### Elemento de Bell

$$\mathbf{P}_K = \mathbf{P}_5'(\mathbf{K}); \dim \mathbf{P}_K = 18$$

$$\mathbf{P}_5'(\mathbf{K}) = \{p \in \mathbf{P}_5(\mathbf{K}); \partial_\nu p \in \mathbf{P}_3(\mathbf{K}'); \mathbf{K}' \text{ lado de } \mathbf{K}\}$$

$$\Sigma_K = \{p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_{11} p(a_i), \partial_{22} p(a_i), \partial_{12} p(a_i); 1 \leq i \leq 3 ; \\ \partial_\nu p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3 \}$$

No contexto de modelagem de terreno este elemento foi proposto para reconstruir uma superfície suave sobre dados esparsos e é conhecido como o interpolador de Akima e garante a continuidade  $C^1$  sobre as arestas da triangulação [AKIM78].



**Fig.:** Elemento de Bell-Akima

Podemos entretanto evitar esta limitação relativa ao grau dos polinômios, e ainda encontrar um elemento conforme  $C^1$ , construindo um “macroelemento” composto de vários elementos padrão. Um dos mais conhecidos é o elemento de Clough-Tocher formado pela combinação de polinômios cúbicos diferentes em três subtriângulos (formados, por exemplo, pelo centróide e os três pares de vértices do macrotriângulo). Os graus de liberdade para o macrotriângulo são os valores da função e das derivadas de ordem 1 nos vértices e o valor da derivada normal nos pontos médios das arestas.

### Elemento de Clough-Tocher

$$P_K = \{p \in C^1(K), p|_{K_i} \in P_3(K_i), K_i \text{ é subtriângulo de } K; 1 \leq i \leq 3\};$$

$$\dim P_K = 12$$

$$\Sigma_K = \{p(a_i), \partial_1 p(a_i), \partial_2 p(a_i), \partial_\nu p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3; p \in P_K\}$$

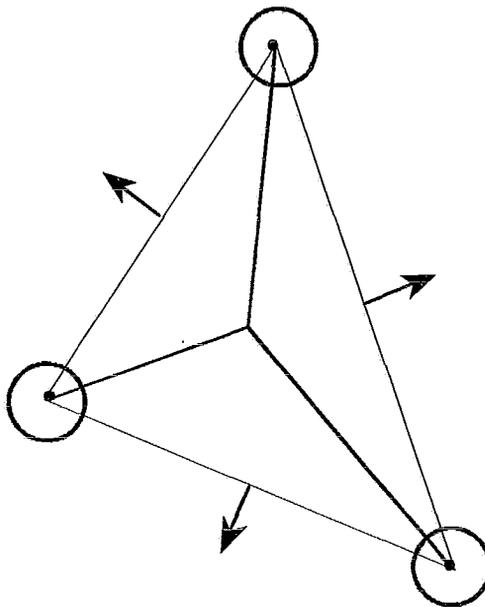


Fig.: Elemento de Clough-Tocher

Uma outra possibilidade é encontrada no trabalho de Powell e Sabin [POWE77], onde um triângulo é dividido em 12 subtriângulos e sobre cada um deles constrói-se uma quadrática emendando-se com continuidade de 1ª ordem com a dos subtriângulos adjacentes. A figura abaixo ilustra a situação

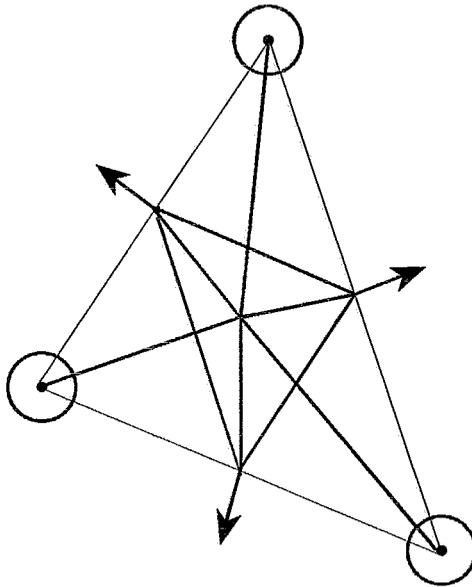
### Elemento de Powell-Sabin

$$P_K = \{p \in C^1(K), p|_{K_i} \in P_2(K_i), K_i \text{ é subtriângulo de } K; 1 \leq i \leq 12\};$$

$$\dim P_K = 20$$

$$\Sigma_K = \{p(a_{ij}), \partial_1 p(a_{ij}), \partial_2 p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3; p \in P_K\}$$

Isto garante a continuidade  $C^1$  através das arestas internas ao macrotriângulo, além das arestas comuns a dois macrotriângulos.



**Fig.:** Elemento de Powell-Sabin

Para completar a nossa lista de exemplos podemos citar o elemento de Morley, não conforme para o problema da placa. Este elemento não é sequer um elemento de classe  $C^0$  [CIAR87]. Ele é caracterizado por

### Elemento de Morley

$$P_K = P_2(K) ; \dim P_K = 6$$

$$\Sigma_K = \{p(a_i), 1 \leq i \leq 3 ; \partial_\nu p(a_{ij}), 1 \leq i < j \leq 3\}$$

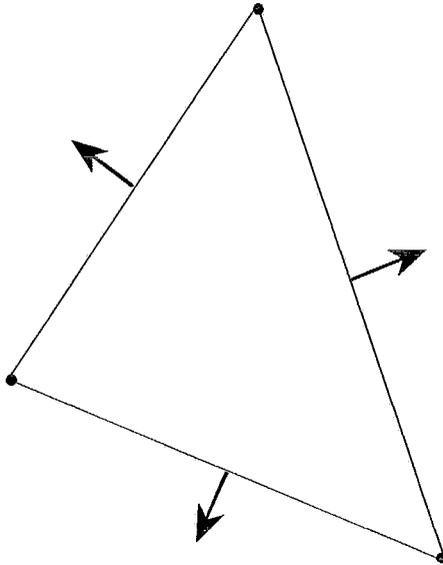


Fig.: Elemento de Morley

## TRIANGULAÇÕES

O uso de esquemas de subdivisão simplicial tem crescido nos últimos anos e se mostrado uma ferramenta importante para resolver problemas geométricos, sistemas de equações algébricas e problemas diferenciais em espaços de dimensão finita. A subdivisão simplicial tem sido aplicada especialmente na definição de malhas para o uso do MEF [CIAR87], [SCHU93a], [SCHU93b], [PERS93]. Muitos esquemas de subdivisão simplicial ou são regulares, isto é, subdividem o espaço em células regulares, ou irregulares mas não garantem uma estrutura de triangulação.

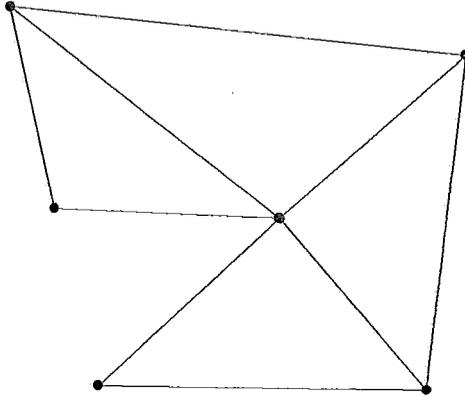
Simplexos bidimensionais são triângulos não degenerados e representam a forma planar mais simples em  $\mathbf{R}^2$ , comparável, em simplicidade e utilidade, apenas aos quadrados. Estes têm sido usados em grades regulares e subdivisões recursivas, da mesma forma que quadrees, devido à sua orientação simples em relação a um sistema de coordenadas cartesianas. Além disso podem servir de substrato para uma decomposição simplicial.

Certos esquemas de subdivisão simplicial são *regulares* ao subdividirem o plano em células regulares. Outros são irregulares e podem não garantir uma estrutura de triangulação no sentido da definição abaixo.

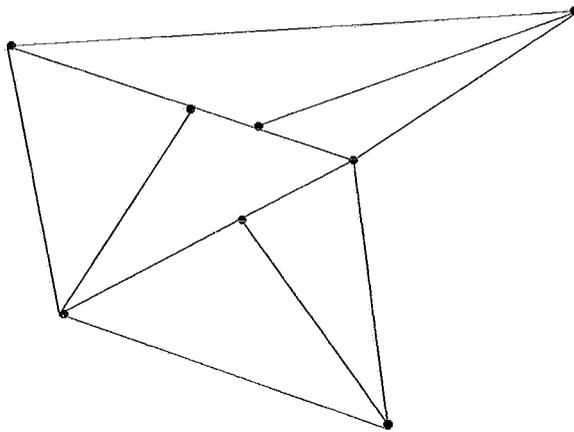
**Definição:** Uma coleção  $\Delta = \{ \tau_i \}_{i=1, \dots, m}$  de triângulos no plano é chamada uma *triangulação* de um domínio conexo  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  se:

- i) qualquer par de triângulos de  $\Delta$  intercepta-se no máximo em um vértice comum ou em uma aresta comum (conformidade);
- ii) a união de todos os triângulos é igual a  $\Omega$ .

A conformidade pode ainda ser expressa afirmando-se que não há vértices de nenhum dos triângulos no interior de uma aresta de qualquer outro.



**Fig.:** Uma triangulação



**Fig.:** Uma não triangulação

Vamos chamar então uma subdivisão simplicial conforme de uma **triangulação**.

Por outro lado, um esquema de triangulação pode dar origem a triângulos alongados onde a razão de aspecto, isto é, a razão entre o menor e o maior lado, pode

ser muito pequena: os triângulos não apresentam uma “boa forma”. Esta característica pode ser uma causa de instabilidade numérica de algoritmos que calculam atributos associados aos triângulos. Isto pode ser exemplificado no cálculo das derivadas parciais de segunda ordem que podem fornecer valores em uma direção muito maiores que os calculados na direção perpendicular.

Dada uma região retangular do plano de lados inteiros podemos decompô-la em um certo número de quadrados. Escolhendo um qualquer como ponto de partida podemos tomar uma de suas diagonais e com ela dividir o quadrado em dois triângulos. Se o quadrado assim dividido é *transladado* de modo a se superpor a cada um dos outros quadrados da subdivisão inicial, a sua subdivisão induz uma triangulação do plano chamada **triangulação K1**. Se, ao invés disso, a divisão da célula é *refletida* em relação aos seus lados teremos uma triangulação chamada **triangulação J1**. Estes dois esquemas asseguram uma subdivisão simplicial *conforme* no sentido da definição acima.

As triangulações **K1** e **J1** assim definidas são chamadas **triangulações CFK** (Coxeter-Freudenthal-Kuhn) [MIRA89], [PERS93], apresentam muitas propriedades combinatórias interessantes e têm servido de base a muitas técnicas de triangulação em  $\mathbb{R}^n$  [APOL95], [BARB95].

## REFINAMENTOS

Chamamos de domínio de uma subdivisão à união de todas as suas células. Dadas duas quaisquer subdivisões  $T_1$  e  $T_2$  dizemos que  $T_2$  é uma subdivisão de refinamento de  $T_1$  se o domínio de  $T_2$  é igual ao domínio de  $T_1$  e cada célula de  $T_2$  está completamente contida em alguma célula de  $T_1$ . Um refinamento de uma triangulação ou **T-refinamento** é uma subdivisão de refinamento que ainda é uma triangulação.

Podemos construir um refinamento simples através de um procedimento de bisseção obtida por uma reta passando pelo ponto médio do seu lado mais longo e pelo vértice oposto. Observemos que este procedimento pode ser aplicado a qualquer triangulação, mas *não* garante que seja gerada uma triangulação.

Um procedimento de refinar triangulações gerais foi proposto por Rivara [RIVA91] para aplicação na geração de malhas de elementos finitos. Este procedimento determina uma triangulação resultante a partir da bisseção dos simplexos e além disso é um procedimento recursivo.

No caso CFK, em que todos os triângulos são retângulos isósceles, o lado mais longo é a hipotenusa e o procedimento dá origem a triângulos do mesmo tipo. Refinamentos binários de triangulações CFK baseados em bisseções podem aproveitar da forma razoável dos simplexos. Idealmente podemos perguntar pelo melhor (menos complexo) refinamento binário de uma triangulação CFK inicial que obedece às exigências do problema. Isto certamente abrange um problema de otimização combinatória que pode ser muito complexo no caso geral. Alternativamente, uma sequência de pequenas etapas econômicas de refinamento pode dar origem a uma boa sub-ótima.

Partindo destas considerações gerais podemos formular uma organização lógica das posições esparsas do nosso conjunto amostral, no sentido discutido no capítulo 1. Ela procurará atender à distribuição dos valores das cotas e será um ingrediente fundamental da nossa proposta de modelagem.

### TRIANGULAÇÕES CFK ADAPTATIVAS

Começemos caracterizando a geometria de um domínio  $D$  contendo o conjunto de posições  $Q^2 = \{q_i \equiv (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 ; i = 1, \dots, N\}$  que chamaremos a nossa região de interesse. Suponhamos  $D = [0, L_1] \times [0, L_2] \subset \mathbb{R}^2$  um

retângulo de lados  $L_1 = n_1 L$  e  $L_2 = n_2 L$  onde  $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}^+$  são primos e  $L$  é um comprimento de referência.

Com esta geometria de partida vamos considerar partições de  $\mathbf{D}$  em quadrados e usando as suas diagonais definir triangulações CFK.

Seja  $\mathcal{T}$  a família de todas as triangulações de  $\mathbf{D}$  cujos triângulos são **triângulos retângulos isósceles**. Vamos escolher o sentido de percurso da fronteira de  $\mathbf{D}$  idêntico ao sentido de percurso da fronteira de qualquer triângulo.

A simplicidade da geometria de qualquer  $\Delta \in \mathcal{T}$  evidencia-se pelo fato de dois triângulos arbitrários de  $\Delta$  diferirem apenas pelo tamanho e/ou pela posição relativa. Qualquer triângulo  $\tau$  de  $\Delta$  pode ser obtido pela aplicação de uma sequência de três transformações afins do plano, a saber, *translação*, *escala* de fator  $2^k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  e *rotação* de um ângulo múltiplo de  $45^\circ$  a um **triângulo básico**  $\hat{\tau}$  de vértices  $\hat{v}_0 = (0,0)$ ,  $\hat{v}_1 = (L, 0)$ ,  $\hat{v}_2 = (0,L)$ . Vamos atribuir, em qualquer triângulo  $\tau$  de  $\Delta \in \mathcal{T}$ , o rótulo  $v_0$  ao vértice formado pela interseção dos dois catetos, isto é, ao vértice oposto à hipotenusa e os rótulos  $v_1$  e  $v_2$  aos outros vértices, na mesma ordem do triângulo básico.

Seja  $\mathbf{T}$  definida por

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_R \circ \mathbf{T}_E \circ \mathbf{T}_T$$

onde

$\mathbf{T}_T$  é uma translação que leva  $\hat{v}_0$  em  $v_0$ ;

$\mathbf{T}_E$  é uma escala de fator  $\frac{\|v_1 v_2\|}{\|\hat{v}_1 \hat{v}_2\|}$ ;

$\mathbf{T}_R$  é uma rotação de um ângulo (escolhendo o sentido anti-horário como o sentido positivo) de  $k \frac{\pi}{4}$ , onde  $k$  é um inteiro positivo **módulo 8**. A orientação da

hipotenusa  $[\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2]$  admite portanto apenas 8 possibilidades, coincidindo com as 8 semi-retas que partem da origem, cada par adjacente formando um ângulo de  $\frac{\pi}{4}$ .

$\mathbf{T}$  fica assim caracterizada como uma transformação conforme do triângulo básico.

As triangulações  $\Delta \in \mathcal{T}$  classificam-se nos dois seguintes tipos:

- **Uniformes**: todos os triângulos têm o mesmo tamanho. Neste caso o número total de seus triângulos será  $\mathbf{T} = 2^k \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2$ , para algum  $k \geq 1$  inteiro.

- **Não-uniformes**: há triângulos de tamanhos diferentes. Em  $\mathbf{D}$  o maior triângulo de  $\mathcal{T}$  não pode ter a hipotenusa maior que  $\min \{ \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \} \sqrt{2} L$ .

Vamos definir o *nível relativo* de uma triangulação à razão entre as áreas do maior e do menor triângulo nela existente. O *nível absoluto* será definido como a razão entre a área do maior triângulo e a área do triângulo básico  $L^2/2$ .

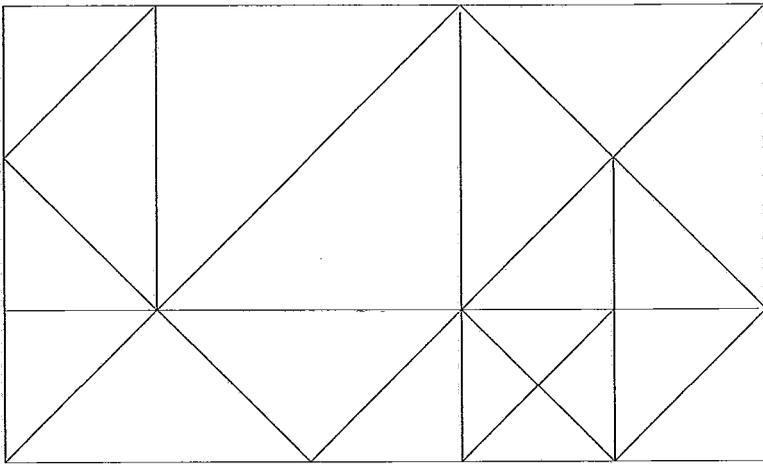


Fig.: Triangulação em um retângulo com  $\mathbf{n}_1 = 5$ ,  $\mathbf{n}_2 = 3$

## A ESTRUTURA DE ADJACÊNCIAS

Caracterizada a estrutura geométrica das triangulações de  $\mathcal{T}$  vamos identificar a sua estrutura topológica.

**Definição:** Dados uma triangulação arbitrária  $\Delta$  e um triângulo  $\tau \in \Delta$  considere a **função vizinhança**

$$\begin{aligned} \mathbf{V}: \{0, 1, 2\} \times \Delta &\rightarrow \Delta \cup \{\emptyset\}; \\ (\mathbf{i}, \tau) &\rightarrow \mathbf{V}(\mathbf{i}, \tau) \equiv \mathbf{V}_i(\tau) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{V}_i(\tau)$  é triângulo adjacente a  $\tau$  que compartilha com  $\tau$  a aresta  $\mathbf{e}_i$  de  $\tau$  ( $\emptyset$  pode ser entendido como o exterior de  $\mathbf{D}$ ).

Sejam  $\Delta \in \mathcal{T}$  e  $\tau = [\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2] \in \Delta$ , com a aresta  $\mathbf{e}_i$  oposta ao vértice  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{i} = 0, 1, 2$ . Considere a rotulação que identifica  $\mathbf{e}_0$  com a hipotenusa (a ordenação das arestas é escolhida no sentido trigonométrico). Então  $\mathbf{V}_0(\tau)$  é o triângulo adjacente a  $\tau$  compartilhando a hipotenusa deste e  $\mathbf{V}_i(\tau)$ ,  $\mathbf{i} \neq 0$  caracteriza a adjacência por um cateto de  $\tau$ .

Com esta função podemos caracterizar estruturas de adjacência nas triangulações da família  $\mathcal{T}$ .

### Definição

Sejam  $\Delta \in \mathcal{T}$  e  $\tau \in \Delta$  arbitrários.

- i) Se  $\mathbf{V}_0(\tau) \notin \Delta$ , isto é, se  $\mathbf{V}_0(\tau) = \emptyset$ , então, neste caso, o par  $\mathbf{N}_\emptyset = (\tau, \emptyset)$  será chamado **núcleo** (degenerado) e  $\tau$  um *elemento de núcleo*.
- ii) Se  $\mathbf{V}_0(\tau) \in \Delta$  então temos duas possibilidades:

- a) Se  $V_0(V_0(\tau)) = \tau$  então o par  $N = (\tau, V_0(\tau))$  é chamado um **núcleo** (não-degenerado) e os triângulos  $\tau$  e  $V_0(\tau)$  são chamados *elementos de núcleo*.
- b) Se  $V_0(V_0(\tau)) \neq \tau$  então a hipotenusa  $e_0$  de  $\tau$  é um cateto de  $V_0(\tau)$  cuja hipotenusa tem comprimento  $\sqrt{2} e_0$ .

### Propriedade

Toda triangulação  $\Delta \in \mathcal{F}$  admite pelo menos um núcleo.

*Prova:*

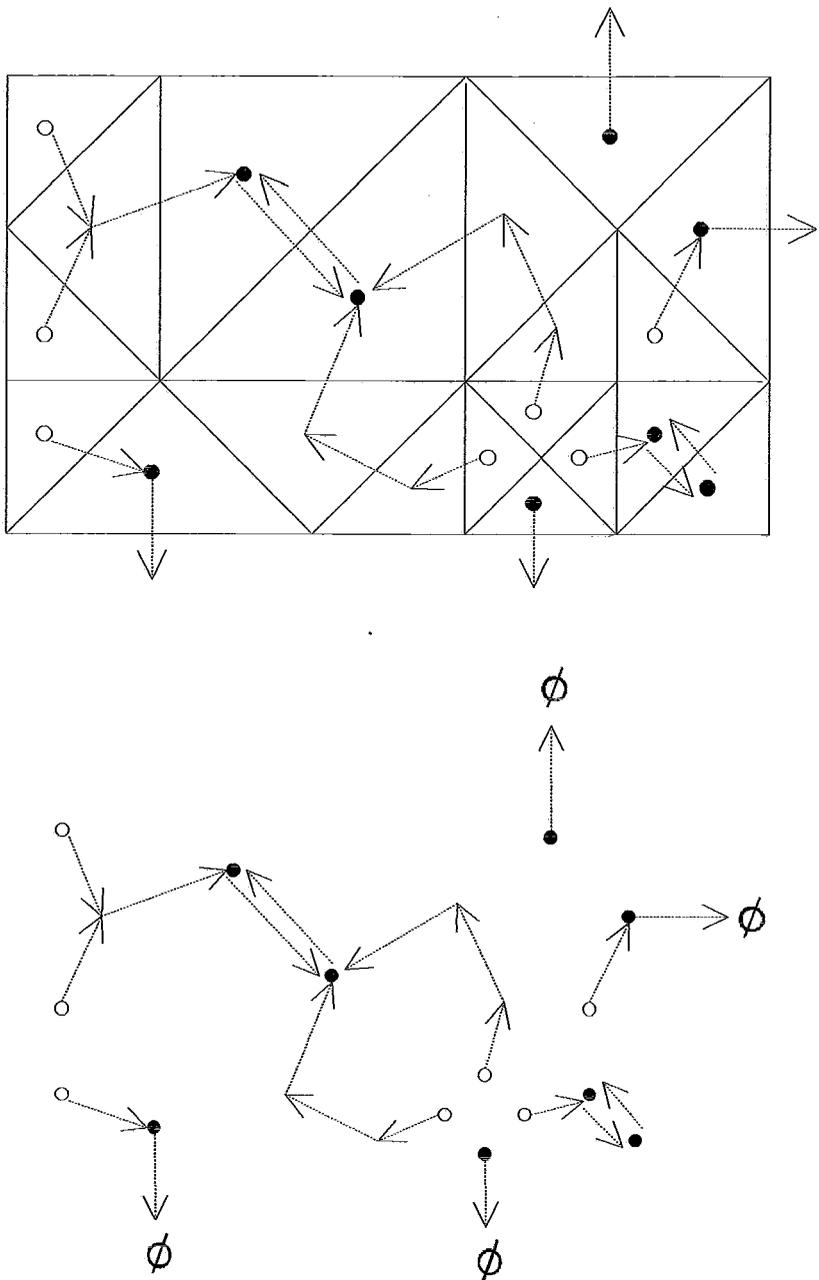
Tome  $\tau \in \Delta$  com a máxima hipotenusa existente em  $\Delta$ . Então  $V_0(\tau)$  é um triângulo do mesmo tamanho que  $\tau$  ou  $V_0(\tau) = \emptyset$ . Em qualquer dos casos teremos um núcleo.

□

A função vizinhança por hipotenusa  $V_0(\tau)$  induz um *grafo* direcionado de adjacências notado  $G_\Delta$  cujos vértices representam os triângulos de  $\Delta$  e uma aresta liga o vértice  $\tau_i \in \Delta$  a  $\tau_j \in \Delta \cup \{\emptyset\}$ ,  $i \neq j$  se  $V_0(\tau_i) = \tau_j$ . Podemos ainda utilizar a nomenclatura  $\tau_j$  é um *sucessor* de  $\tau_i$  e  $\tau_i$  um *antecessor* de  $\tau_j$ .

Podemos ter triângulos que não admitem um antecessor e neste caso eles serão chamados *triângulos fonte*.

Observemos que este grafo apresenta ciclos de comprimento 2 que correspondem aos núcleos não-degenerados.



**Fig.:** O grafo induzido  $G_{\Delta}$  por  $V_0(\cdot)$  da triangulação  $\Delta$ ; os círculos cheios representam os triângulos dos núcleos e os círculos os triângulos fonte.

As componentes conexas de  $G_\Delta$  serão chamadas **bacias** (atração) de um núcleo. Podemos construir, à partir de  $G_\Delta$ , uma floresta composta de árvores direcionadas cujas folhas são elementos de núcleo. Estas árvores contêm os caminhos maximais da triangulação. Um caminho é uma seqüência de transição "suave" pois os comprimentos das hipotenusas dos triângulos da seqüência diferem sempre pelo fator  $\sqrt{2}$ .

### AS OPERAÇÕES DE REFINAMENTO E ALTERAÇÃO DE UMA TRIANGULAÇÃO

Caracterizada a geometria e a estrutura de adjacências de uma triangulação genérica  $\Delta \in \mathcal{T}$  vamos estabelecer as relações entre duas quaisquer.

A seqüência de tamanhos das hipotenusas dos triângulos de uma dada triangulação permite estabelecer o fator de proporcionalidade entre dois deles e a comparação das seqüências de duas triangulações permite verificar se há alguma relação "genética" entre elas, isto é, se é possível passar de uma à outra.

A existência de tal relação permite definir operações fechadas sobre a família  $\mathcal{T}$  e neste caso é preciso caracterizá-lo.

Dois exemplos são familiares quando se considera triangulações arbitrárias de domínios conexos do plano: o operador de *refinamento* e o operador de *troca* ("*swap*"). Começemos caracterizando o primeiro, que admite várias alternativas de definição.

Na construção de um refinamento de uma triangulação  $\Delta$  efetuamos a divisão de um ou mais de seus triângulos em  $k \geq 2$  de partes exigindo a satisfação da conformidade da triangulação.

Em uma seqüência de trabalhos [RIVA91], Rivara define um processo de refinamento usando o valor  $k = 2$ , apresentando os seguinte aspectos: manutenção da

boa forma dos triângulos e efeitos localizados do processo. Este segundo permite construir refinamentos de uma triangulação adaptados a um determinado critério.

As idéias centrais desta *bisseção* são a escolha do ponto médio do maior lado de um triângulo e a sua ligação ao vértice oposto e a eliminação das não-conformidades geradas:

$$\begin{array}{l}
 \textit{RefinaTriângulo}(\tau, \Delta) \\
 \{ \\
 \quad \textit{Execute bisseção de } \tau ; \\
 \quad \textit{Enquanto}(\Delta \textit{ não for uma triangulação}) \textit{ faça} \\
 \quad \quad \textit{RefinaTriângulo}(\mathbf{V}_0(\tau), \Delta) \\
 \}
 \end{array}$$

Nos restringindo à família  $\mathcal{T}$  e ao domínio retangular  $\mathbf{D}$ , observamos que a utilização do processo de Rivara é particularmente adequado. A sua aplicação a qualquer  $\Delta \in \mathcal{T}$  dá origem a triangulação da mesma família: a ligação do ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles ao vértice oposto dá origem a triângulos do mesmo tipo. Em um trabalho recente foi caracterizada a equivalência, para  $\Delta \in \mathcal{T}$  entre o processo de Rivara e uma seqüência de bisseções de núcleos de  $\Delta$  [BARB94].

Baseados nestes resultados vamos definir duas operações que permitirão gerar seqüências de refinamentos a partir de uma dada triangulação de  $\mathcal{T}$ .

**Definição:** Sejam  $\Delta \in \mathcal{T}$  e  $\mathbf{N}$  um núcleo arbitrário de  $\Delta$ . Uma operação de **refinamento elementar** em  $\Delta$  realiza a bisseção do núcleo  $\mathbf{N}$  dando origem a um refinamento  $\mathbf{B}_{\mathbf{N}}(\Delta)$ .

Observemos que o operador está bem definido pois toda triangulação de  $\mathcal{T}$  admite pelo menos um núcleo. O refinamento por ele gerado é uma triangulação de  $\mathcal{T}$ , caracterizando que  $\mathbf{B}_N$  é uma operação fechada em  $\mathcal{T}$ ; ela contém mais 2 triângulos em relação à anterior, se o núcleo é não degenerado e apenas mais um triângulo no caso degenerado. Além disso são criados, no caso de um núcleo não-degenerado: um novo vértice, ponto médio da hipotenusa, quatro novas arestas de comprimento igual à metade da hipotenusa e é destruída a hipotenusa, diagonal do núcleo; no caso de um núcleo degenerado são criados: um novo vértice de fronteira, ponto médio da hipotenusa, uma nova aresta, altura do triângulo e mais duas outras em consequência da bisseção da hipotenusa, que por sua vez desaparece.

Seja  $\tau \in \Delta$  e tal que  $\tau$  não seja um elemento de núcleo. Considere o triângulo  $\tau' \notin \Delta$ , simétrico de  $\tau$  em relação à hipotenusa deste. Ao par  $(\tau, \tau')$  chamaremos de *núcleo virtual*, que é necessariamente não degenerado.

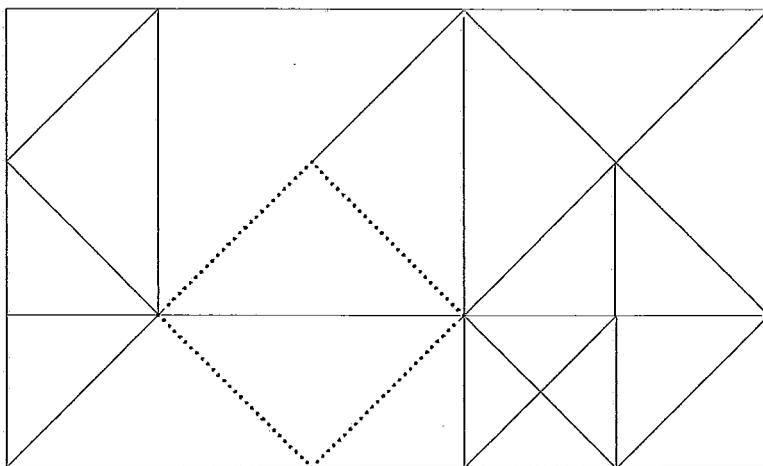


Fig.: Um núcleo virtual

Estendendo a definição de refinamento elementar para que esta possa ser aplicada a núcleos virtuais, podemos construir uma seqüência de refinamentos elementares associados aos núcleos virtuais criados a partir de  $\tau$  até que o último destes núcleos virtuais coincida com um núcleo (real) que contem  $\tau$ . Ao considerar esta seqüência estaremos percorrendo o caminho, que tem como triângulo inicial o triângulo dado, no sentido do triângulo do núcleo no qual o caminho "deságua". Isto motivou o uso do termo *bacia associada a um núcleo*.

A discussão acima sugere a definição de uma seqüência de refinamentos elementares cada um dos quais está associado ao núcleo criado pela operação anterior, até que seja criado o núcleo contendo um triângulo dado inicialmente, que pode ou não ser um triângulo fonte. A operação associada a este núcleo é o último elemento da seqüência contendo o triângulo inicial, como mostra a figura, no caso em que este é um triângulo fonte.

Uma segunda operação descreverá a construção da seqüência acima e permitirá a descrição do processo de Rivara no escopo das idéias deste trabalho, incorporando algumas das idéias desenvolvidas em [BARB94] e possibilitará uma formulação mais algébrica do processo.

**Definição:** Uma operação de **refinamento básico**  $R_B(\Delta)$  em  $\Delta$  partindo de um triângulo  $\tau$  é uma seqüência ordenada de operações de refinamento elementar  $B_{N_1}, \dots, B_{N_k}$ ,  $k \geq 1$ ,  $B_{N_k} ( B_{N_{k-1}} ( \dots ( B_{N_1} (\Delta) ) \dots ) )$

tais que

- (i)  $N_1$  é um núcleo de  $\Delta$ ;
- (ii)  $N_{j+1}$  é o núcleo criado por  $B_{N_j}$ ,  $j = 1, \dots, k - 1$ ;

(iii)  $N_{\mathbf{k}}$  contem o triângulo  $\tau$ .

A aplicação da operação de refinamento básico a  $\Delta \in \mathcal{T}$  garante, por definição, a obtenção de um refinamento  $\mathbf{R}_B(\Delta) \in \mathcal{T}$ , caracterizando assim uma operação fechada em  $\mathcal{T}$ . Além disso o refinamento gerado goza das duas propriedades mencionadas anteriormente: "boa" forma dos triângulos e adaptabilidade. A sequência de refinamentos elementares, usada na definição do refinamento básico para gerar um refinamento  $\mathbf{R}_B(\Delta) \in \mathcal{T}$ , partindo de um dado triângulo, é a *menor possível*.

Um refinamento básico corresponde ao percurso de um caminho (de refinamento) no grafo  $G_\Delta$ . Observemos que neste processo estamos percorrendo, em sentido inverso, partindo de um núcleo, um caminho maximal de  $\Delta$ , embora possamos aplicá-lo a um caminho qualquer. Uma bacia vai então caracterizar o subconjunto da triangulação de todos refinamentos básicos possíveis à partir de um núcleo.

Experimentos realizados em triangulações da família  $\mathcal{T}$  sugerem que o comprimento médio estatístico dos caminhos de refinamento é da ordem de 4 triângulos.

Uma formulação algorítmica de um refinamento básico pode ser escrita por [BARB94]:

$$\begin{array}{l} \textit{RefinamentoBásico}(\tau, \Delta) \\ \{ \\ \quad \textit{Se}(\tau \text{ não está em um núcleo}) \textit{ então} \\ \quad \{ \\ \quad \quad \textit{RefinamentoBásico}(\mathbf{V}_0(\tau), \Delta); \\ \quad \} \\ \} \end{array}$$

*RefinamentoElementar* ( $\tau, \Delta$ );

}

Uma operação de outra natureza, não envolvendo subdivisão de triângulos, mas permitindo ainda a criação de uma nova triangulação, pode ser considerada. Ela é aplicável a uma triangulação arbitrária de qualquer domínio do plano [SCHU93b], e pode ser particularmente útil para as triangulações de  $\mathcal{T}$  em algumas situações.

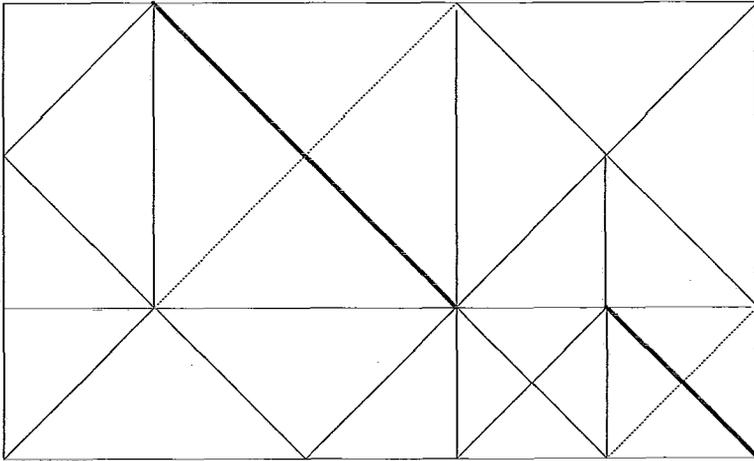
**Definição:**

Seja  $\Delta \in \mathcal{T}$  uma triangulação arbitrária e  $N$  um núcleo não-degenerado de  $\Delta$ . A operação de **troca** ("swap") elimina a diagonal de  $N$ , uma aresta pertencendo a  $\Delta$ , e insere uma nova aresta, a outra diagonal do núcleo, dando origem a uma triangulação  $S(\Delta)$ .

Observemos algumas propriedades:

- A operação  $S$  não altera o tamanho de triângulos de  $\Delta$ , mas apenas as suas posições;
- A operação  $S$  preserva o número de triângulos, arestas e vértices de  $\Delta$ , além do número de seus núcleos não-degenerados;
- A operação  $S$  seguida de uma operação de refinamento elementar  $B_N$  equivale à aplicação apenas desta última.
- A operação  $S$  é idempotente, no sentido que a sua aplicação duas vezes fornece a triangulação de partida.

Esta operação permite modificações muito bem localizadas em uma triangulação e pode ser usada para alterar os suportes de funções da base do espaço de splines sem alterar a dimensão do espaço.



**Fig.:** Duas operações de troca: as diagonais tracejadas são trocadas pelas cheias em dois núcleos da triangulação.

Uma outra propriedades da família de triangulações  $\mathcal{T}$  está ligada à construção de suportes de funções do espaço de elementos finitos, quando os graus de liberdade estão associados a valores pontuais em vértices da triangulação.

**Definição:**

Seja  $v$  um vértice de  $\Delta$ . Se  $v$  é interno a  $D$  então a **estrela** de  $v$ , notada  $M(v)$ , é a união de todos os triângulos de  $\Delta$  que admitem  $v$  como vértice.

Em uma triangulação  $\Delta$  da família  $\mathcal{T}$  a estrela de um vértice tem algumas propriedades particulares. Se  $v$  é um vértice interno de  $\Delta$  e  $M(v)$  tem  $N_v$  triângulos então  $M(v)$  será um polígono convexo com  $4 \leq N_v \leq 8$  lados. Se considerarmos os triângulos adjacentes à menor aresta interna de  $M(v)$  eles possuem o mesmo tamanho

e portanto a estrela de qualquer vértice interno contem pelo menos dois triângulos de mesmo tamanho.

## CONCLUSÕES

Apresentamos as idéias básicas do MEF que permite a construção dos espaços de dimensão finita satisfazendo às hipóteses dos teoremas demonstrados no capítulo 1. Listamos exemplos de elementos não conformes de interesse para o nosso problema, em particular os elementos lagrangeanos, que se mostrarão de interesse, como veremos mais adiante. Os elementos conformes apresentados possuem grau elevado ou compõem-se de retalhos definidos em subtriângulos.

Como a construção dos espaços de elementos finitos repousa sobre a definição de triangulações no domínio  $D$ , apresentamos as idéias gerais sobre triangulações e seus refinamentos. Descrevemos em seguida as triangulações CFK adaptativas que serão utilizadas em virtude de suas propriedades interessantes. Os seus triângulos são sempre retângulos isósceles e a função vizinhança por hipotenusa induz um grafo de adjacências. Neste são facilmente identificados os núcleos da triangulação e as bacias correspondentes. O processo de refinamento introduzido por Rivara garante a manutenção da boa forma dos triângulos. Definimos as duas operações que o implementam e descrevemos as propriedades da operação de troca de hipotenusa em um núcleo.

A comparação do processo de refinamento adotado e do processo de construção de alguns elementos conformes permite identificar uma inadaptação entre eles. Basta considerar o elemento de Clough-Tocher definido sobre uma triangulação CFK e um refinamento básico. Isto sugere dificuldades na construção dos espaços de elementos finitos pois o refinamento pode não dar origem a um subespaço. Este tema será central no próximo capítulo.

Apresentaremos a seguir as dificuldades de obtenção de um conjunto não vazio de restrições para cada problema considerado: o processo de refinamento junto com o tipo de elemento escolhido podem não dar origem a um subespaço e/ou perder a localidade do refinamento. Para superá-las proporemos então um problema semelhante aos já definidos e utilizaremos dois tipos de elementos, um conforme e o outro não conforme. Garantiremos a convergência pontual da sequência de suas soluções para a solução do problema contínuo. Como estratégia de solução consideramos inicialmente uma etapa de viabilização como um problema de Programação Linear e uma etapa de deformação como o problema de Programação Quadrática. Definiremos ainda critérios de determinação da solução viável, ponto de partida para a obtenção do modelo de terreno com a suavidade adequada.

#### DIFICULDADES NA OBTENÇÃO DE UMA SOLUÇÃO

A nossa proposta de modelagem conduziu, no capítulo 2, à definição de um conjunto problemas: um problema  $P$  chamado problema *contínuo* e um conjunto de problemas  $P_m$  chamados de problemas *discretos*.

Seja  $V$  o nosso espaço admissível e consideremos os conjuntos

$$\Phi = \{ \alpha \in L^\infty(\mathbf{D}) \mid \alpha(q_i) \in I(z_i, \varepsilon_i), i = 1, \dots, N \}$$

com  $I(z_i, \varepsilon_i) = [z_i - \varepsilon_i, z_i + \varepsilon_i]$ , e

$$\Phi \cap V = \{ \varphi \in V \mid \varphi(q_i) \in I(z_i, \varepsilon_i); i = 1, \dots, N \}$$

$$\Phi_m = \Phi \cap V_m = \{\varphi \in V_m \mid \varphi(q_i) \in I(z_i, \varepsilon_i), i = 1, \dots, N\}, m \geq 1$$

Expressos ainda na sua formulação abstrata os dois primeiros problemas são:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \quad & \text{Minimizar } J(\varphi) \\ & \text{sujeito a } \varphi \in \Phi \cap V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m \quad & \text{Minimizar } J(\varphi) \\ & \text{sujeito a } \varphi \in \Phi_m \end{aligned}$$

Com a hipótese da separabilidade de  $V$  podemos construir uma sequência encaixada de subespaços de dimensão finita:

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \dots \subset V$$

e concluir que:

$$(i) \text{ Se } \Phi_1 \neq \emptyset \text{ então } \Phi_m \neq \emptyset, \forall m > 1$$

(ii) Se  $B_m = \{e_{m,1}, \dots, e_{m,n}\}$  é uma base de  $V_m$  podemos completá-la e obter uma base de  $V_{m+1}$ :  $B_{m+1} = B_m \cup \{e_{m+1,n+1}, \dots, e_{m+1,n+k}\}$

O Método de Ritz-Galerkin garante que a sequência de soluções  $\{\bar{\varphi}_m\}_m$  dos problemas discretos converge para a solução  $\bar{\varphi}$  do problema contínuo.

Se definirmos um  $V$ -refinamento de um espaço vetorial  $V$  como sendo a construção de um espaço vetorial  $W$  tal que  $V \subset W$  então a sequência de subespaços acima é uma sequência de  $V$ -refinamentos de um subespaço inicial  $V_1$ .

O MEF é uma maneira sistemática de construir esta sequência. Seja  $V = H^2(D)$  onde  $D$  é a nossa região de interesse. Vamos supor  $V_m$ , para todo  $m \geq 1$  um espaço de elementos finitos.

Primeiramente precisamos construir o espaço  $V_1$  e garantir que o conjunto de restrições  $\Phi_1$  é **não vazio**. O próximo passo é construir a sequência de  $V$ -refinamentos de  $V_1$ :

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \dots \subset V$$

A idéia chave na construção da sequência é o completamento de bases, partindo de uma base  $B_1$  de  $V_1$ .

Para construir  $V_1$  precisamos de uma triangulação de  $D$  e de uma base composta de funções de suporte pequeno, definida sobre ela. Esta base depende do tipo de elemento definido na triangulação o qual fica caracterizado pela escolha de  $P_K$ , o conjunto de funções definidas em um triângulo  $K$  e  $\Sigma_K$  o conjunto de graus de liberdade associados a  $K$ , garantidas as condições de inclusão  $V_1 \subset H^2(D)$ . Então se fixarmos o tipo de retalho, a definição do espaço  $V_1$  fica inteiramente associada à escolha de uma triangulação em  $D$ .

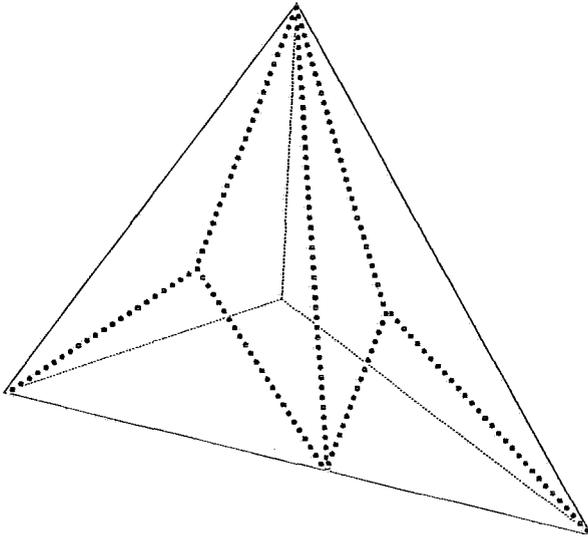
Suponhamos fixado o tipo de retalho, escolhida a triangulação  $\Delta_1$  e construído  $V_1$ . Suponhamos garantido que  $\Phi_1 \neq \emptyset$ .

Para construir cada um dos outros espaços da sequência teremos que construir triangulações em  $D$  usando o mesmo tipo de retalho e concluímos que a construção dos  $V$ -refinamentos de  $V_1$  vai repousar sobre a construção dessas triangulações, isto é, dos  $T$ -refinamentos de  $V_1$ .

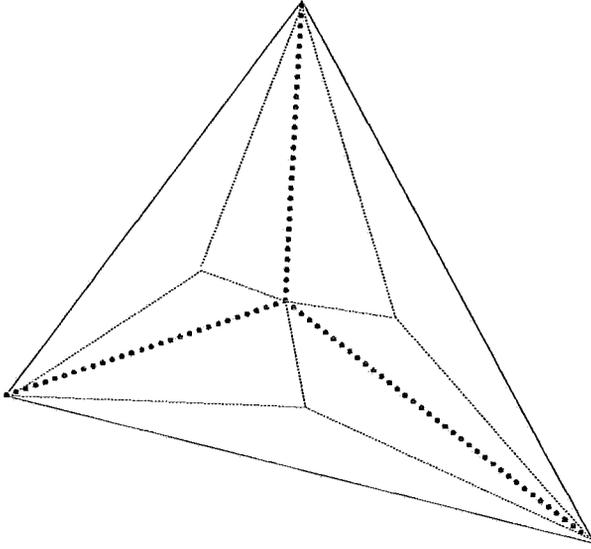
A cada  $T$ -refinamento de uma triangulação deveríamos ter um subespaço do espaço definido sobre ela, isto é, um  $V$ -refinamento deste. Mas, para que isto ocorra é preciso que algumas condições sejam satisfeitas, entre elas que os novos retalhos consigam restituir o antigo retalho sobre a união dos subtriângulos que restituem o antigo triângulo.

Vamos insistir em que um  $T$ -refinamento dê origem um  $V$ -refinamento do espaço. Para que isto ocorra será preciso levar em conta o tipo de triângulos, o tipo de retalho, o processo geométrico que caracteriza o  $T$ -refinamento e a relação entre os novos e os antigos retalhos.

A título de exemplo das dificuldades existentes, podemos tomar um retalho Clough-Tocher. Se o refinamento da triangulação for realizado, por exemplo, por um processo de bisseção dos triângulos, então a definição de um retalho Clough-Tocher sobre os dois novos triângulos não permite reproduzir o antigo retalho, ou seja, a bisseção da triangulação não conduz a um V-refinamento. Entretanto podemos definir um outro T-refinamento, por exemplo, a divisão do triângulo em três subtriângulos, análoga à divisão usada na definição do próprio retalho Clough-Tocher, que conduzirá a um V-refinamento.



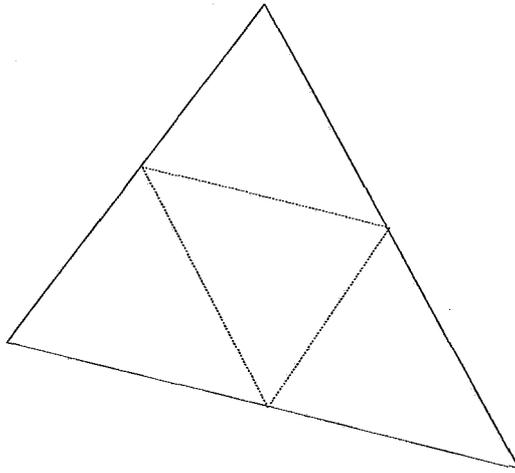
**Fig.:** Sudvisão binária de um triângulo de Clough-Tocher e os novos subtriângulos



**Fig.:** Sudvisão adaptada de um triângulo de Clough-Tocher

Mas este **T**-refinamento pode dar origem a outras dificuldades. Uma relativa ao tipo de seus triângulos: triângulos cada vez mais alongados, sem uma boa razão de aspecto, em que os ângulos internos dos subtriângulos são também divididos. Em consequência a aplicação sucessiva deste tipo de **T**-refinamento tende a criar triângulos degenerados no limite, o que compromete a estabilidade numérica do algoritmo de resolução do problema. A outra relativa ao domínio do **T**-refinamento que deverá ser toda a região de interesse para que tenhamos um **V**-refinamento, o que caracteriza um **T**-refinamento *global*.

Mas mesmo no exemplo abaixo, no qual o processo geométrico de subdivisão dá origem a triângulos com boa razão de aspecto somos obrigados a construir ainda um **T**-refinamento global, onerando o custo computacional.



**Fig.:** Subdivisão mantendo a boa forma

Podemos escolher outros tipos de retalhos como o de Bell-Akima ou o de Argyris para os quais poderemos ter **T**-refinamentos locais, adaptativos, gerando triângulos com boa razão de aspecto e dando origem a um **V**-refinamento. Mas isto é conseguido às custas da utilização de polinômios de grau elevado, cinco nesses exemplos; novamente o custo computacional transforma-se no gargalo do processo.

A escolha de um tipo de retalho lagrangeano e **T**-refinamentos locais, adaptativos, gerando triângulos com boa razão de aspecto, não garante gerar espaços de elementos finitos que sejam subespaços de  $\mathbf{H}^2(\mathbf{D})$ , isto é, são não-conformes para o problema da placa. Embora usados na prática, estes elementos suscitam questões de convergência mais difíceis que não abordaremos.

Podemos então concluir que se quisermos realizar **T**-refinamentos adaptativos de uma triangulação mantendo uma boa razão de aspecto para os seus triângulos deveremos abdicar de obter **V**-refinamentos. Sem essa propriedade não poderemos garantir que se encontrarmos  $\Phi_1 \neq \emptyset$  teremos  $\Phi_2 \neq \emptyset$  e assim um problema discreto viável na sequência pode não garantir que o próximo o seja. Deveremos portanto, ao construir cada **V**-refinamento, tentar garantir por outros meios que o  $\Phi_j$  correspondente seja não vazio.

Toda essa discussão parece bizantina perante o Teorema 2 do capítulo 2, que munido da hipótese **H2** assegura a existência de solução de  $(\mathbf{P}_m)$  para  $m$  suficientemente grande. No entanto, a satisfação da hipótese **H2** requer, na prática, refinamentos possivelmente muito mais elevados do que o necessário para atingir-se a precisão satisfatória da solução aproximada. As propostas das seções que se seguem surgem como uma alternativa parcimoniosa, em termos de refinamento, para estas questões.

### APROXIMANDO AS RESTRIÇÕES AO $\mathbf{P}_m$

A dificuldade em garantir que  $\Phi_m$  seja não vazio para cada problema  $\mathbf{P}_m$  está ligada à relação entre **T**-refinamentos e **V**-refinamentos. Temos que calcular a energia e atender às restrições com a mesma função do espaço  $\mathbf{V}_m$ . Observemos que com uma elevação do nível de refinamento, a energia de deformação em cada triângulo tende a zero. Com isso, a superfície em cada triângulo aproxima-se de sua interpolação linear no triângulo. Por outro lado, o uso de uma solução linear por partes tem sido tradicionalmente usada em modelagem de terreno, devido ao seu custo computacional relativamente baixo.

A idéia é satisfazer às restrições de forma aproximada através de funções mais simples  $L_m(\varphi) \in L^\infty$  e desacoplar parcialmente a satisfação das restrições do cálculo da energia onde  $\varphi \in H^2(\mathbf{D})$  é utilizada. À uma função  $\varphi$  em  $\mathbf{V}_m$  associaremos uma outra função  $L_m(\varphi)$  em  $\mathbf{W}_m = L_m(\mathbf{V}_m)$  verificando as restrições do problema  $\mathbf{P}_m$ . Por exemplo  $L_m(\varphi)$  é o interpolador linear por partes de  $\varphi$  baseado na triangulação (elemento de Courant).

A adoção do aproximador  $L_m(\varphi)$  para  $\varphi$  nos conduz ao seguinte problema aproximado em substituição ao  $\mathbf{P}_m$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{PL}_m \quad & \text{Minimizar } J(\varphi) \\ & \text{sujeita a } \varphi \in \Psi_m \cap \mathbf{V}_m \end{aligned}$$

onde  $\Psi_m = \{ \alpha \in L^\infty(\mathbf{D}) \mid L_m(\alpha) \in \Phi \}$ .

De forma geral, suporemos que  $L_m$  é uma transformação linear que leva  $V_m$  em um subespaço  $W_m$  de  $L^\infty$ . Para escolhas convenientes do aproximador  $L_m$  (o caso linear por partes é um exemplo), os subespaços  $W_m$  formam um  $W$ -refinamento como decorrência de  $T$ -refinamentos. Em outros termos, para qualquer sequência de  $T$ -refinamentos teremos  $W_m \subset W_{m+1}$ . A decorrência notável disso será a garantia de viabilidade sucessiva dos problemas  $PL_m$ .

### Proposição

Suponha  $L_m(V_m) = W_m \subset W_{m+1} = L_{m+1}(V_{m+1})$ , para todo  $m$  e  $\Psi_m \neq \emptyset$ .

Então  $\Psi_{m+1} \neq \emptyset$ .

### Prova

Seja  $\varphi \in \Psi_m$  e  $\alpha = L_m(\varphi)$ . Então  $\alpha \in \Phi \cap W_m$  e pela hipótese  $\alpha \in \Phi \cap W_{m+1}$ .

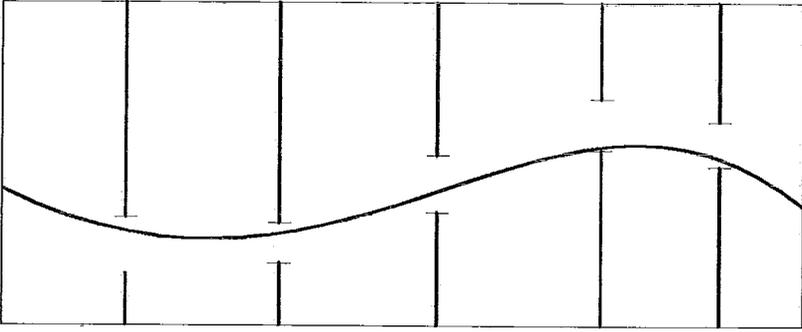
Mas como  $W_{m+1} = L_{m+1}(V_{m+1})$  existe  $\varphi' \in V_{m+1}$  tal que  $L_{m+1}(\varphi') = \alpha$ . Logo

$L_{m+1}(\varphi') \in \Phi \cap W_{m+1}$  ou equivalentemente  $\varphi' \in \Psi_{m+1} \neq \emptyset$ .

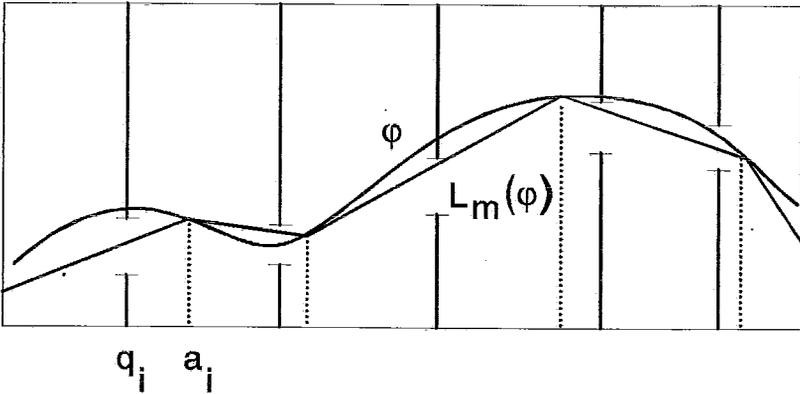
□

A título de exemplo se  $V_m$  é construído com um retalho de Clough-Tocher podemos escolher  $W_m$  construído com o triângulo de Courant [CIAR87]. A função  $L_m$  vai associar a cada retalho Clough-Tocher a linear que interpola o retalho nos vértices do triângulo. É fácil verificar que nesse exemplo os espaços de aproximação  $W_m$  formam uma sequência encaixada como requer a proposição anterior. Além das lineares podemos igualmente considerar retalhos quadráticos.

As figuras abaixo ilustram uma versão unidimensional das idéias acima discutidas.



**Fig.** Versão unidimensional de uma solução viável (Problema  $P_m$ )



**Fig.** Versão unidimensional de uma solução  $L_m(\phi)$  viável (Problema  $PL_m$ ) onde  $q_i$  é um ponto amostral e  $a_i$  um ponto da decomposição do intervalo

Vamos então provar as soluções de  $PL_m$  convergem *pontualmente* para a solução do problema contínuo  $P$ . Com esses resultados fica assegurada a coerência de toda a teoria formulada

#### O PROBLEMA MISTO :ANÁLISE DE CONVERGÊNCIAS

As dificuldades apontadas na seção anterior motivaram a caracterização de um enfoque chamado *misto* cujo significado passamos a discutir.

Seja  $L_m : L^\infty(\mathbf{D}) \rightarrow L^\infty(\mathbf{D})$  uma transformação linear contínua e definamos

$$\Psi_m = \{ \alpha \in L^\infty(\mathbf{D}) \mid L_m(\alpha) \in \Phi \cap V_m \}$$

lembrando que  $\Phi = \{ \alpha \in L^\infty(\mathbf{D}) \mid \alpha(\mathbf{q}_i) \in \mathbf{I}(\mathbf{z}_i, \varepsilon_i), i = 1, \dots, N \}$ .

Dentro deste enfoque consideraremos o problema:

$$\begin{aligned} (\mathbf{PL}_m) \quad & \text{Minimizar } \mathbf{J}(\varphi) \\ & \text{sujeita a } \varphi \in \Psi_m \end{aligned}$$

O problema acima definido caracteriza um paralelo entre a discussão usual de aproximação através do método de Galerkin [CÉA71] e o enfoque que estamos propondo: aproximar  $\varphi \in V$  ou  $\varphi \in V_m$  por sua transformada  $\alpha_m = L_m(\varphi)$ . As funções  $\alpha_m$  não estão necessariamente em um espaço conforme e a sua utilização restringir-se-á à verificação das restrições do problema. Precisamos assegurar a consistência da abordagem proposta verificando que os problemas  $\mathbf{PL}_m$  admitem uma solução única.

### EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Para que possamos garantir a existência de uma solução única do problema  $\mathbf{PL}_m$  precisamos de uma hipótese estabelecendo uma relação entre os espaços  $V_m$  e a transformação linear  $L_m$ .

Hipótese **H3** : Separabilidade de  $L_m$

Para todo conjunto de pontos  $\mathbf{p}, \mathbf{q}_j \in \mathbf{D}$ ,  $j = 1, \dots, N$  existem  $\mathbf{M} > 0$  e  $\mathbf{d} > 0$  tais que para todo  $\mathbf{m} > \mathbf{M}$  existem  $\mathbf{v}_m \in V_m$  com  $\|\mathbf{v}_m\| < \mathbf{d}$  satisfazendo  $L_m \mathbf{v}_m(\mathbf{p}) > 0$  e  $L_m \mathbf{v}_m(\mathbf{q}_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$

**Teorema 3**

Suponha satisfeita a hipótese **H3**. Então para  $m$  suficientemente grande o problema  $\mathbf{PL}_m$  é viável e admite uma única solução.

*Prova*

Sejam  $M > 0$ ,  $d > 0$  e, para  $m > M$ ,  $v_{m,i} \in V_m$  tais que  $\|v_{m,i}\| < d$  e  $L_m v_{m,i}(q_j) = \delta_{ij}$ . Defina  $\varphi_m = \sum_{i=1}^N z_i v_{m,i}$ . Então  $L_m \varphi_m(q_j) = z_j$  e  $\varphi_m$  é viável para o problema  $\mathbf{PL}_m$ . Analogamente à prova do teorema de existência e unicidade do problema contínuo (Cap. 2) concluímos que  $\mathbf{PL}_m$  admite uma única solução.

□

**CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES**

A garantia das convergências mencionadas e o seu significado serão dados pelos resultados abaixo. Seguiremos os mesmos passos usados no capítulo 2, inclusive o Lema 1.

A hipótese abaixo permitirá caracterizar a proximidade das sequências de funções  $\{\varphi_m\}$  e  $\{L_m \varphi_m\}$ .

**Hipótese H4**: Aproximação de  $L_m$

Existe uma sequência  $\{c_m\}$  positiva, convergindo a zero, tal que para todo  $\varphi \in V_m$ :  $\sup \{ |\varphi(p) - (L_m \varphi)(p)|, p \in D \} \leq \|\varphi\| c_m$

As hipóteses apresentadas asseguram a validade das hipóteses do Lema 1. O lema abaixo afirma essencialmente a mesma coisa que o lema 2 do capítulo 2.

**Lema 3**

Suponha satisfeitas as hipóteses **H1**, **H3** e **H4**. A solução  $\bar{\varphi}$  do problema **P** é o limite de alguma sequência  $(\varphi_m)_{m > M}$  em  $\Psi_m$ .

*Prova*

Seja  $w_m \in V_m$ ,  $w_m \rightarrow \bar{\varphi}$  de acordo com **H1**.

Considerando **H3** sejam  $v_{m,i} \in V_m$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $m > M$  tais que  $\|v_{m,i}\| < d$  e  $L_m v_{m,i}(p_j) = \delta_{ij}$ . Defina  $\varphi_m \in V_m$  por

$$\varphi_m = w_m + \sum_{i=1}^N (\bar{\varphi}(q_i) - (L_m w_m)(q_i)) v_{m,i}$$

Então  $\varphi_m \in \Psi_m$  pois pela linearidade de  $L_m$ :

$$\begin{aligned} L_m \varphi_m(q_j) &= L_m w_m(q_j) + \sum_{i=1}^N (\bar{\varphi}(q_i) - (L_m w_m)(q_i)) L_m v_{m,i}(q_j) \\ &= L_m w_m(q_j) + (\bar{\varphi}(q_j) - (L_m w_m)(q_j)) \\ &= \bar{\varphi}(q_j) \end{aligned}$$

Por outro lado, por **H4**

$$\begin{aligned} \|\varphi_m - \bar{\varphi}\| &\leq \|\varphi_m - w_m\| + \|w_m - \bar{\varphi}\| \\ &\leq \sum_{i=1}^N |\bar{\varphi}(q_i) - (L_m w_m)(q_i)| \|v_{m,i}\| + \|w_m - \bar{\varphi}\| \\ &\leq d \sum_{i=1}^N |\bar{\varphi}(q_i) - (L_m w_m)(q_i)| + \|w_m - \bar{\varphi}\| \\ &\leq d \sum_{i=1}^N |w_m(q_i) - (L_m w_m)(q_i)| + d \sum_{i=1}^N |\bar{\varphi}(q_i) + w_m(q_i)| + \\ &\quad + \|w_m - \bar{\varphi}\| \\ &\leq d \sum_{i=1}^N \|w_m\| c_m + d \sum_{i=1}^N |\bar{\varphi}(q_i) - w_m(q_i)| + \|w_m - \bar{\varphi}\| \end{aligned}$$

o que confirma a tese do lema.

□

**Lema 4**

Supondo H4 verdadeira, se a sequência  $\{ \varphi_m \}$ ,  $\varphi_m \in \Psi_m$ , converge fracamente a  $\varphi$  então  $\varphi \in \Phi$ .

*Prova*

Suponha  $\varphi_m \in \Psi_m$  convergindo fracamente a  $\varphi$ . Então  $\lim \varphi_m(q_i) = \varphi(q_i)$  e  $\lim \| \varphi_m \| \leq \| \varphi \|$ .

Então, para qualquer  $\delta > 0$  e  $m$  suficientemente grande, de H4 resulta

$$\begin{aligned} \varphi(q_i) &\leq L_m \varphi_m(q_i) + \| \varphi_m \| c_m + 2\delta \\ &\leq L_m \varphi_m(q_i) + \| \varphi \| c_m + 3\delta \end{aligned}$$

e como  $\varphi_m \in \Psi_m$  concluímos que  $\varphi(q_i) \leq z_i + \varepsilon_i + 4\delta$

De forma análoga

$$\begin{aligned} \varphi(q_i) &\geq \varphi_m(q_i) - \delta \\ &\geq L_m \varphi_m(q_i) - 4\delta \\ &\geq z_i - \varepsilon_i - 3\delta \end{aligned}$$

□

**Teorema 4**

Sejam  $\bar{\varphi}$  a solução do problema P,  $\varphi_m$  a solução de PL<sub>m</sub>. Então H1, H3 e H4 garantem  $\bar{\varphi} = \lim \bar{\varphi}_m$ .

*Prova*

Idêntica à prova do teorema 2 do capítulo 2

□

**Corolário**

Se **H1**, **H3** e **H4** são satisfeitas então a sequência  $(L_m \bar{\varphi}_m)_m$  de aproximações de soluções ótimas de  $PL_m$  converge uniformemente para a solução  $\bar{\varphi}$  de **P**.

**Prova**

Para todo  $p \in D$ ,  $\delta > 0$  e  $m$  suficientemente grande vale

$$\begin{aligned} |\bar{\varphi}(p) - L_m \bar{\varphi}_m(p)| &\leq |\bar{\varphi}(p) - \bar{\varphi}_m(p)| + |\bar{\varphi}_m(p) - L_m \bar{\varphi}_m(p)| \\ &\leq \delta + |\bar{\varphi}_m(p) - L_m \bar{\varphi}_m(p)| \end{aligned}$$

pela convergência de  $(\bar{\varphi}_m)_m$

$$\leq 2\delta + \|\bar{\varphi}_m\| c_m \quad (\text{por H4})$$

$$\leq 3\delta + \|\bar{\varphi}\| c_m \text{ pela convergência de } (\bar{\varphi}_m)_m$$

$$\leq 4\delta$$

□

Os resultados demonstrados acima caracterizam as funções  $L_m \bar{\varphi}_m$  como soluções aproximadas para o problema contínuo.

A figura abaixo ilustra o significado das convergências demonstradas: a convergência das soluções  $\bar{\varphi}_m$  dos problemas  $P_m$ , representadas por círculos e a convergência pontual das funções  $L_m \varphi^*_m$ , representadas pelos quadrados, onde  $\varphi^*_m$  são soluções dos problemas  $PL_m$ , representadas pelos triângulos. A solução ótima  $\bar{\varphi}$  é representada pela estrêla.

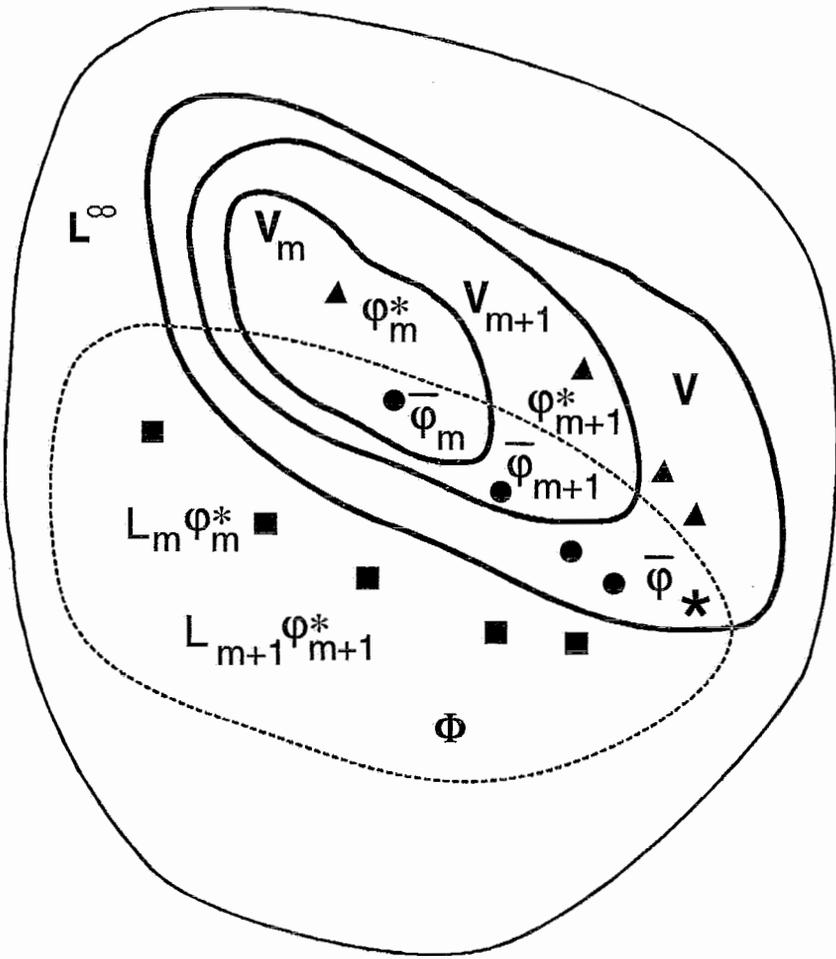


Fig.: As diversas convergências para a solução ótima

## ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO

A definição de estratégias que permitam a construção de uma solução para o problema de modelagem através do MEF admite alguns pressupostos básicos.

Em primeiro lugar as malhas de elementos finitos são triangulações. Na iteração de ordem  $m$  todos os triangulos da malha  $\Delta_m$  têm diâmetro menor que  $1/m$ .

Além disso o espaço  $V_m$  é qualquer espaço de funções *spline* sobre  $\Delta_m$  que seja conforme para o problema da placa fina, como por exemplo o que usa elementos de Clough-Tocher ou o que usa elementos de Powell-Sabin.

Finalmente, se  $\varphi \in V_m$  a sua transformada  $L_m \varphi$  é a função linear por partes que interpola  $\varphi$  nos vértices da malha  $\Delta_m$ .

Desta forma temos a garantia de satisfação das hipóteses apresentadas.

A hipótese **H1** é satisfeita pela conformidade do espaço  $V_m$ .

Para garantir a satisfação da hipótese **H3** basta verificar que a razão entre  $|\varphi - L_m \varphi|_\infty^2$  e  $\|\varphi\|^2$  onde  $|\varphi|_\infty = \sup \{ |\varphi|; \mathbf{p} \in \mathbf{D} \}$  é limitada em  $V_m$ .

De fato, dado o maior triângulo  $\tau$  da triangulação considere  $\bar{\varphi}$  que resolve o problema

$$\text{Min} \quad \int_{\tau} [ \varphi_{xx}^2 + \varphi_{yy}^2 + 2 \varphi_{xy}^2 ]$$

$$\text{sujeito a} \quad |\varphi - L_m \varphi|_\infty \geq 1$$

$$\varphi \in V_m$$

A energia total de  $\bar{\varphi}$  em  $\tau$  é proporcional a  $m$  e cresce mais que uma função linear em  $m$ .

Para qualquer  $\varphi$  em  $V_m$  definindo  $\varphi^* = \varphi / |\varphi - L_m \varphi|_\infty$  devemos ter

$$\|\varphi^*\|^2 / |\varphi^* - L_m \varphi^*|_\infty^2 \geq \int_{\tau} [ \bar{\varphi}_{xx}^2 + \bar{\varphi}_{yy}^2 + 2 \bar{\varphi}_{xy}^2 ] \geq m/c$$

onde  $c$  é uma constante. Logo  $L_m$  satisfaz à hipótese **H3** em  $V_m$  com  $c_m = c/m$ .

A satisfação da hipótese **H4** decorre do argumento abaixo.

Sejam  $\mathbf{p}, \mathbf{p}_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$  pontos de  $\mathbf{D}$ . Denomine por  $d$  a menor distância entre o ponto  $\mathbf{p}$  e os demais. Considere  $m > 2/d$  e seja  $\tau$  o triângulo de  $\Delta_m$  que contem  $\mathbf{p}$ . Então nenhum dos triângulos de  $\Delta_m$  incidentes à arestas ou vértices de  $\tau$  contem qualquer dos  $\mathbf{p}$ . Nessas condições tome  $v_m$  como qualquer das funções de base do elemento associado a  $\tau$  que não se anula em  $\mathbf{p}$ . A função  $v_m$  convenientemente escalada satisfaz **H4**.

Assim a sequência de problemas  $\mathbf{PL}_m$  fica associada, em geral, a uma sequência de subespaços  $(\mathbf{V}_m)_m$  de  $\mathbf{V}$  e a uma sequência de  $\mathbf{W}$ -refinamentos de subespaços de  $\mathbf{L}^\infty$ .

A construção de uma solução para o nosso problema, através do uso dos problemas mistos permitiu superar as dificuldades apontadas na seção anterior se pudermos garantir que exista algum  $\Psi_m \neq \emptyset$ . Esta garantia deverá ser buscada através de alguma estratégia.

Podemos então concluir que a formulação do problema misto permite garantir a viabilidade de  $\mathbf{PL}_{m+1}$  à partir de  $\mathbf{PL}_m$  por  $\mathbf{T}$ -refinamentos independentemente de termos  $\mathbf{V}$ -refinamentos pois a definição de  $\mathbf{L}_m$  e a hipótese essencial garante a existência de  $\mathbf{W}$ -refinamentos. O uso de interpoladores lagrangeanos propicia concretizar os  $\mathbf{W}$ -refinamentos e que as soluções dos  $\mathbf{PL}_m$  convergem para a solução de  $\mathbf{P}$ . Resta apenas construir pelo menos uma função viável para o nosso problema.

## AS ETAPAS

O desacoplamento entre a satisfação das restrições e o cálculo da energia permite que estabeleçamos separadamente uma estratégia de obtenção de uma primeira solução viável. Em seguida poderemos nos preocupar com o grau de aproximação que as outras soluções viáveis apresentam em relação à solução contínua. A busca da solução será feita em duas etapas.

A etapa de viabilização permitirá procurar primeiro uma solução viável em algum  $\mathbf{V}_m$  utilizando um problema com uma função objetivo mais simples, uma linear, o que chamaremos de *problema de viabilização (PV)*. Em seguida tendo encontrado o primeiro  $\Psi_m \neq \emptyset$ , passaremos à etapa de aproximação onde vamos buscar uma outra solução viável, em algum  $\Psi_p$ ,  $p > m$  fornecendo uma boa aproximação da solução do problema contínuo. Esta será o nosso modelo de terreno. Este segundo problema será chamado de *problema de deformação (PD)*.

Vamos começar então a definir cada um dos problemas.

Seja  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)^T \in \mathbf{R}^N$  com  $\gamma_i \geq 0, \forall i$  e defina

$$\Psi_m(\gamma) = \{ \varphi \in \mathbf{V}_m \mid \begin{aligned} &(\mathbf{L}_m(\varphi))(q_i) - \gamma_i \leq z_i + \varepsilon_i, \\ &(\mathbf{L}_m(\varphi))(q_i) + \gamma_i \geq z_i - \varepsilon_i, i = 1, \dots, N \end{aligned} \}$$

Observemos que  $\Psi_m(\mathbf{0}) = \Psi_m$ .

O problema de viabilização, que notaremos por problema por **PV** será:

$$\begin{aligned} \text{(PV) Minimizar } & \sum_i \gamma_i \\ \text{sujeita a } & \varphi \in \Psi_m(\gamma) \\ & \gamma \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Se definirmos uma matriz  $N \times k$ , notada por  $R$ , como  $R_{ij} = \mathbf{B}_i(q_j)$  podemos formular o problema, equivalentemente, por uma representação algébrica. Lembremos que nem todos os  $\beta$  aparecem nas expressões correspondentes a dois retalhos adjacentes.

$$\begin{aligned} \text{(PV) Minimizar } & \sum_i \gamma_i \\ \text{sujeita a } & R\beta - \gamma \leq z + \varepsilon, \\ & R\beta + \gamma \geq z - \varepsilon \\ & \gamma \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Uma solução deste problema, se existir, será notada por um  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  um vetor de  $\mathbf{R}^{n+N}$ .

O problema de viabilização, como definido, é um problema de Programação Linear [LUEN73] que sempre admite uma solução, como veremos.

A ligação entre os problemas de viabilização (**PV**) e o de deformação (**PD**) se faz através do seguinte resultado.

### Proposição

O **PV** é sempre viável. Além disso, se  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  resolve o **PV** com  $\bar{\gamma} = \mathbf{0}$  então  $\bar{\beta}$  é viável para o **PD**.

### Prova

O **PV** é sempre viável: de fato, dado qualquer  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ , escolha  $\gamma_j \geq \max \{ R_j \beta - z_j - \epsilon_j, z_j - \epsilon_j - R_j \beta \}$ . O par  $(\beta, \gamma)$  fornecerá uma solução viável para o **PV**.

Suponha agora que  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  resolve o **PV** com  $\bar{\gamma} = \mathbf{0}$ . Então  $z - \epsilon \leq R \bar{\beta} \leq z + \epsilon$  e  $\bar{\beta}$  satisfaz às restrições do **PD**.

□

Vamos partir de uma triangulação inicial **CFK** da região de interesse, que como vimos no capítulo 3, apresenta propriedades interessantes, como a boa razão de aspecto de seus triângulos e a variação “lenta” dos tamanhos dos triângulos: dois triângulos adjacentes pela hipotenusa têm os seus lados diferindo por um fator  $\sqrt{2}$ .

Levando em conta que estaremos utilizando interpoladores lineares e uma função objetivo também linear podemos realizar **T**-refinamentos locais pois estes darão origem a **V**-refinamentos do espaço de elementos.

Para cada refinamento teremos uma solução  $(\beta, \gamma)$  de **PV**, com  $\gamma \geq \mathbf{0}$ .

Vemos assim que a utilização do vetor  $\gamma$  permite ter um *indicador de não-viabilidade* ao longo do processo: aqueles triângulos nos quais as posições amostrais apresentam  $\gamma_i \neq 0$  merecem ser refinados.

A heurística escolhida então será dividir os triângulos nos quais existe pelo menos uma posição amostral com  $\gamma_i \neq 0$  até que tenhamos para algum  $m$  um  $T$ -refinamento para o qual a solução seja  $(\bar{\beta}, 0)$ . Esta será a triangulação de partida para a segunda etapa.

Tendo uma triangulação de  $D$  e um espaço de elementos lineares para os quais  $\Psi_m(0)$  é não vazio podemos agora retomar o problema misto, agora sob a denominação:

O Problema de Deformação

**(PL<sub>m</sub>) Min J( $\varphi$ )**

sujeita a  $\varphi \in \Psi_m(0)$

Com a notação definida anteriormente podemos ainda escrever

**(PL<sub>m</sub>) Min  $\beta^T Q \beta$**

sujeita a  $R\beta \leq z + \varepsilon$ ,  $R\beta \geq z - \varepsilon$

O problema **PD** é um problema quadrático [LUEN69] e observemos que se o problema de deformação é viável então ele possui solução ótima única.

Vamos construir  $V_m$  com o nosso elemento conforme e  $W_m$  com interpoladores lineares.

Resolvendo **PD** neste espaço obteremos uma solução  $\varphi_m \equiv \bar{\beta}_m$ . Podemos calcular a sua energia total  $J(\varphi_m)$  e a local, em cada triângulo. Se a energia em um

triângulo é suficientemente baixa então  $\varphi_m$  aproxima bem  $\varphi$  nesse triângulo, em decorrência da construção e dos resultados apresentados neste capítulo. Podemos então tomar  $J(\varphi_m)$ , em cada triângulo, como um indicador de erro.

Vamos então adotar como critério de refinamento: se para um triângulo, a energia a ele associada for maior que um valor pré-determinado, ele dever refinado.

A solução procurada será alcançada quando todos os triângulos tiverem energia inferior a um certo valor limiar. Teremos assim construído o nosso modelo de terreno !

## CONCLUSÕES

Discutimos as dificuldades de obtenção de uma aproximação da solução do problema contínuo  $P$  em termos de soluções dos problemas  $P_m$ . Considerando os espaços de elementos finitos constatamos que um T-refinamento pode não dar origem a um V-refinamento, como desejável para a aplicação da teoria formulada.

Para contornar essas dificuldades definimos os problemas  $PL_m$ , onde introduzimos a transformação linear  $L_m : V_m \rightarrow W_m \subset L^\infty$  que uma função  $\varphi$  em  $V_m$  associa uma outra função  $L_m(\varphi)$  em  $W_m = L_m(V_m)$ . Apresentamos a formulação matemática correspondente nos moldes da anterior. Nesta temos a convergência (na norma de  $V$ ) de uma sequência de funções  $\varphi$  e a convergência pontual e uniforme das funções  $L_m(\varphi)$ . O limite de ambas é a solução do problema  $P$ . Isto possibilitou a utilização de W-refinamentos sem a exigência de V-refinamentos. Foram formuladas estratégias de resolução com a sua decomposição em duas etapas: uma de viabilização envolvendo um problema de programação linear e a outra de programação quadrática, o  $PL_m$ .

Se  $V_m$  é um espaço de elementos conformes,  $W_m$  não o é, em geral. A utilização de elementos lagrangeanos, em especial o elemento linear, na construção de  $W_m$ , vai dar origem a uma solução linear por partes  $L_m(\bar{\varphi}_m)$ . Esta solução tem

as características suficientes para ser um modelo de terreno para o problema que estamos considerando.

Concluída a elaboração teórica da nossa proposta de modelagem precisamos encontrar exemplos de elementos que permitam uma implementação simples e possibilite uma verificação, tanto dos critérios adotados pelas estratégias propostas, quanto das suas características computacionais. No momento que este texto foi concluído a implementação computacional ainda estava em andamento. Não pudemos incluir resultados que permitissem uma avaliação dos modelos criados dentro da proposta teórica aqui desenvolvida.

A implementação computacional está sendo realizada por Antônio Lopes Apolinário Júnior no âmbito do projeto GEOTEC - Programa PROTEM do CNPq que financiou o seu trabalho.

Ela está sendo desenvolvida utilizando-se o paradigma de orientação à objetos. Em particular optou-se pela linguagem C++. A plataforma computacional utilizada é uma IBM PowerServer 590, rodando o sistema operacional AIX 3.2. Como ferramenta para visualização dos resultados utilizamos o software Data Explorer, também da IBM.

Na resolução dos problemas de otimização está sendo utilizado o sistema LOQO, desenvolvido por Robert J. Vanderbei, Program in Statistics & Operations Research, Princeton University. O sistema é cedido sem ônus a universidades para ser usado em trabalhos de âmbito acadêmico, como o nosso. O LOQO foi projetado para resolução de problemas programação quadrática e/ou programação linear com restrições e suporta um conjunto de restrições de cardinalidade elevada.

---

Apresentamos neste trabalho uma proposta para a construção de um modelo de terreno. Esta proposta está amparada em uma formulação matemática para a qual foi preciso comprovar a validade. A formulação envolve, em seu aspecto mais relevante, um problema de otimização de curvatura, com restrições pontuais.

A solução do problema nessa formulação é composta de um par de funções interrelacionadas através de uma transformação linear. A primeira permite avaliar o critério de otimização e a segunda, chamada de função viável, satisfaz às restrições. Provamos que a determinação de uma função viável garante a existência de uma solução viável. Escolhemos funções lineares por partes como candidatas a funções viáveis mas a formulação proposta é geral o suficiente, para permitir a utilização de outros tipos.

O mais notável resultado é a convergência de ambas as funções para uma mesma função: a primeira delas, na norma do espaço onde o problema foi formulado e as funções viáveis através da convergência pontual uniforme. Esta função limite constitui a solução ótima. As questões de convergência, aqui resolvidas, não foram encontradas anteriormente na literatura.

Os pares de espaços que contêm essas funções foram construídos através do Método dos Elementos Finitos. Foram empregadas as triangulações CFK adaptativas devido à sua qualidade: os seus triângulos são sempre retângulos isósceles e os seus refinamentos têm efeito localizado. Para explorar a sua topologia definimos um grafo de adjacências que melhor revela a repercussão de um refinamento. Refinamentos realizados em triangulações deste tipo preservam a existência de funções viáveis.

Empregamos uma estratégia de resolução em duas etapas tal que na primeira delas utilizamos um problema de programação linear. Através deste

problema, mais simples e menos custoso, determinamos uma função viável, linear por partes. Na segunda etapa o problema de programação quadrática fornece soluções viáveis que possibilitam determinar uma aproximação satisfatória da solução ótima.

No que se refere à modelagem de terreno, a proposta generaliza aquela que é usada na criação de modelos baseados em interpoladores: a solução buscada deve, nas posições do conjunto amostral, aproximar as cotas dentro das tolerâncias dadas, que podem ser nulas. Neste sentido o modelo criado “honra” os dados amostrais. Além disso, o modelo procurado (uma aproximação satisfatória para a solução ótima) será uma função próxima de uma linear por partes. O modelo proposto tende a suavizar a solução, representando mal terrenos que apresentem falhas geológicas ou quebra de aclave. Isto dificulta a recuperação de linhas e pontos característicos do terreno a modelar.

Em outros enfoques emprega-se um funcional de energia análogo e formula-se um problema de otimização irrestrito, com um critério envolvendo penalidades [TERZ88], [WEYR92]. A resolução deste problema é simples e pouco custosa, envolvendo a solução de sistemas algébricos. Por outro lado estas abordagens apresentam dificuldades em tratar problemas com restrições em um conjunto finito de pontos. É certamente um problema difícil encontrar um critério, para ajustar as penalidades, de modo a obter uma boa aproximação da solução ótima nos pontos do conjunto de dados. No contexto de modelagem de terreno pode ser difícil encontrar valores adequados para as penalidades de modo a “honrar” o conjunto amostral.

A nossa formulação resolve problemas de programação quadrática com restrições, mais difíceis e custosos, em comparação com os sistemas de equações daquelas. Entretanto é capaz de aproximar os valores amostrais no sentido mais preciso de respeitar as tolerâncias.

A tarefa imediata que se impõe, na continuação deste trabalho, é realizar a análise dos resultados que a implementação fornecerá. As conclusões irão permitir

uma melhor escolha do critério heurístico de refinamento e do indicador de grau de aproximação.

Como proposta de trabalhos futuros vislumbramos algumas vertentes.

A formulação apresentada admite a possibilidade de generalização e desta forma tratar outros problemas com outros tipos de restrições. Além disso pode fornecer soluções aproximadas para problemas com restrições contínuas, como condições de fronteira. A abordagem apresentada pode ainda trazer novas idéias em relação à utilização de aproximações não conformes.

Uma tarefa que se impõe naturalmente é a generalização da teoria de convergência para soluções não-conformes, procurando associar-lhes uma interpretação física.

Considerando a interpretação em termos de elasticidade, podemos pensar em aplicar a nossa abordagem a placas de rigidez variável com a posição ou seja de material não uniforme, o que nos levará a outros funcionais de energia. A solução dos problemas correspondentes poderá ser dependente de ajuste de parâmetros caracterizando a rigidez do material e dando maior aplicabilidade ao modelo. Neste sentido o trabalho de Terzopoulos [TERZ88] pode apresentar interesse. Outros tipos de restrições, por exemplo envolvendo conjuntos finitos e não finitos (linhas) precisarão ser incorporadas.

Estas possibilidades podem ser exploradas para gerar modelos de terreno mais adequados, capazes de recuperar melhor aspectos da geometria do relevo como cristas, linhas de cumeada, entre outras.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [ADAM75] Adams, R.A., "Sobolev Spaces", Academic Press 1975
- [APOL95] Apolinário, A.L.Jr., "Poligonização Adaptativa da Fronteira de Sólidos CSG", Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1995
- [AKIM78] Akima, H., "A Method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregular distributed data points", ACM Trans. on Math. Software, 4(2), 148-159, 1978
- [BARB94] Barbalho, V., "Triangulação Adaptativa de Sólidos CSG para Geração de Malhas de Elementos Finitos", Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1994
- [CÉA71] Cea, J., "Optimisation - Théorie et Algorithmes", Dunod 1971
- [CIAR87] Ciarlet, P. G., "The Finite Element Methods for Elliptic Problems", North Holland, 1987
- [DIER92] Dierckx, P., Van Leemput, S., Vermeire, T., "Algorithms for surface fitting using Powell-Sabin splines", IMA Journal of Numerical Analysis, vol.12, 271-299, 1992
- [LUEN69] Luenberger, D. G., "Optimization by Vector Space Methods", John Wiley & Sons, Inc., 1969
- [LUEN73] Luenberger, D. G., "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley 1973

- [McCU88] McCullagh, M. J., "Terrain and Surface Modelling Systems: Theory and Practice", Photogrammetric Record, 12(2), 74-779, 1988
- [MIRA89] Miranda J., Tavares G., "Métodos Simpliciais em Computação Gráfica", IMPA, 1989
- [PERS93] Persiano, R. M., Comba, J. L. D., Barbalho, V., "An Adaptive Triangulation Refinement Scheme and Construction", Anais do SIBGRAPI VI, 259-266, 1993
- [POWE77] Powell M. J. D., Sabin, M. A., "Piecewise Quadratic Approximations on Triangles", ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 3, No. 4, 316-325, 1977
- [RIVA91] Rivara, M. C., "Local modification of meshes for adaptive and/or multigrid finite elements methods", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 36, 79-89, 1991
- [SCHU93a] Schumaker, L. L., "Triangulations in CAGD", IEEE Computer Graphics & Applications, 47-52, January 1993
- [SCHU93b] Schumaker, L. L., "Computing optimal triangulations using simulated annealing", Computer Aided Geometric Design, vol. 10, 329-345, 1993
- [STRA73] Strang, G., Fix, G. J., "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall, 1973
- [TERZ86] Terzopoulos, D., "Regularization of Inverse Visual Problems Involving Discontinuities", IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intell., vol. PAMI-8, no. 4, 413-424, 1986

- [TERZ88] Terzopoulos, D., "Modeling Inelastic Deformation: Viscoelasticity, Plasticity, Fracture", *ACM Computer Graphics*, vol. 22, 269-278, 1988
- [TERZ89] Terzopoulos, D., "Multilevel Computational Processes for Visual Surface Reconstruction", *Comput. Vision, Graphics and Image Proc.*, vol. 24, 52-96, 1983
- [WEYR92] Weyrich, N., "Bivariate Spline Approximation by Penalized Least Squares", in "Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II", Lyche, T., Shumacher, L. L. (eds.), Academic Press 1992, pags. 607-614